

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México. México. No. 11. Julio-Diciembre 2024.

*Edición especial actas del Simposium Internacional de Reflexiones y Avances sobre el
Problema de los Cuatro Colores y la Teoría de Grafos.*

OBJETOS MATEMÁTICOS

- Exégesis sobre los casos orientables y no orientables de G. Ringel en el estudio del Problema de los cuatro Colores. Antecedentes matemáticos y sus consecuencias.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

- Teorema de los cuatro colores aplicado en el pequeño rombicosidodecaedro.

Jaime William Flores Tecalco.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- Modelado Matemático de un algoritmo para comportamiento de enjambres robóticos basados en las restricciones del teorema de los cuatro-colores.

Marcos Fajardo Rendón.

- Propuestas matemáticas para grafos, teorema de los cuatro colores y probabilidad.

Fernando Gustavo Isa Massa.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Areli Guadalupe Mateos Sánchez.

COMITÉ CIENTÍFICO

Caballero Mora Karen Salomé.

Guzmán Sánchez Sergio.

Isa Massa Fernando Gustavo.

Juárez Contreras Socorro.

Mendoza Pérez Armando Felipe.

Sentiés Nacaspac María de Jesús.

Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Tucumán. Argentina.

Instituto Politécnico Nacional. Dirección General.

Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.

Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster

Marcos Fajardo Rendón

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 11, julio-diciembre 2024 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx ; revistajoom@gmail.com .

Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-021112015700-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.

Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 1 de octubre de 2024.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

*Edición especial actas del Simposium Internacional de Reflexiones y Avances sobre el
Problema de los Cuatro Colores y la Teoría de Grafos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 11.

Julio-Diciembre de 2024

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares y de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* número 11, julio-diciembre de 2024, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
-------------------------	----------

OBJETOS MATEMÁTICOS

Exégesis sobre los casos orientables y no orientables de G. Ringel en el estudio del Problema de los cuatro Colores. Antecedentes matemáticos y sus consecuencias.	15
<i>Exegesis on the orientable and non-orientable cases of G. Ringel in the study of the Four Colors Problem. Mathematical background and its consequences.</i>	
<i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	
Teorema de los cuatro colores aplicado en el pequeño rombicoidodecaedro.	21
<i>Four color theorem applied to the small rhombicuboctahedron.</i>	
<i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Modelado Matemático de un algoritmo para comportamiento de enjambres robóticos basados en las restricciones del teorema de los cuatro-colores.	27
<i>Mathematical modeling of an algorithm for robotic swarm behavior based on the constraints of the four-color theorem.</i>	
<i>Marcos Fajardo Rendón.</i>	
Propuestas matemáticas para grafos, teorema de los cuatro colores y probabilidad.	39
<i>Mathematical proposals for graphs, four color theorem and probability.</i>	
<i>Fernando Gustavo Isa Massa.</i>	

CARTA DEL EDITOR

El Primer Simposio Internacional que organizamos los editores titulado “*Symposium Internacional de Reflexiones y Avances sobre el Problema de los Cuatro Colores y la Teoría de Grafos*” fue llevado a cabo en las instalaciones de la Biblioteca Vasconcelos de la Ciudad de México el pasado viernes 15 de marzo de este 2024; el evento fue dedicado al trabajo de investigación realizado por Gerhard Ringel (en colaboración con Ted Youngs) y que publicó en la editorial Springer en 1974 con el título de “*Map Color Theorem*”, incluido en su colección “*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*” (Los principios básicos de las ciencias matemáticas) Tomo 209.

Este quincuagésimo aniversario de la publicación también coincide con la secuencia calendárica de 2024 a partir del viernes 1 de marzo y como es sabido, el rasgo distintivo de nuestra revista es analizar contribuciones matemáticas realizadas en años cuyos calendarios sean congruentes con el año de publicación del número progresivo de la revista electrónica.

En el prefacio de su obra, Ringel menciona como antecedente inmediato el trabajo realizado por P. J. Heawood y publicado en 1890 con el nombre de “*Map Colour Theorem*” en *Quart. Journal Math.* No. 24 (pp. 332-338); sin embargo, Heawood no escribió alguna prueba para su proposición, por ello se le conoció como la Conjetura de Heawood entre los matemáticos de la época. En 1968 (año cuya secuencia calendárica es totalmente congruente con este 2024) se publicó una prueba de la conjetura por lo que se le denominó otra vez Teorema. Una consecuencia inmediata de esta prueba es el desarrollo de interesantes métodos en la Teoría de la Enumeración, concretamente con el método de la Combinatoria; dicha prueba se divide en doce casos. Sin embargo, el trabajo realizado para concretarla no fue fácil. Para 1966 todavía no estaban resueltos tres de los doce casos. Es así que para el ciclo escolar 1967-1968 G. Ringel es invitado por J. W.T. Youngs para realizar la investigación conjunta en la solución de estos tres casos faltantes para completar la prueba de la todavía Conjetura de Heawood. Este trabajo colaborativo se realizó en la Universidad de California en la ciudad de Santa Cruz y con bastante esfuerzo conjunto lograron dar solución a los tres casos faltantes. Detalles interesantes de este trabajo se conocen pues Ringel comenta la carta que le escribió Ted Youngs. Fechada el viernes 1 de marzo de 1968, Youngs realiza un “memorándum histórico” de los resultados obtenidos para los Casos 2, 8 y 11 (este último con una solución muy elegante). Menciona que el Caso No. 8 lo empezaron a estudiar el martes 10 de octubre de 1967 y lo terminaron de resolver el martes 14 de noviembre de ese año con la importante y crucial idea de Ringel relacionada con las “adyacencias adicionales” propuestas antes, el domingo 29 de octubre; sin embargo no se concluía la parte regular del problema con dicha propuesta, por ello para el lunes 30 de octubre por la tarde, Ringel desarrolló una segunda propuesta: “...y con el milagro de la buena fortuna que ocasionalmente acompaña a los matemáticos, concluí (Youngs) la conformación del diagrama para el caso s , en menos de quince minutos...”; y al estilo de una serie televisiva de la época, ambos investigadores se estrecharon la manos al festejar su éxito. Pero la situación para el caso resultó extraña y s ocupó más tiempo de lo esperado. “...Me entregaste una propuesta a través de un programa el lunes 13 de noviembre, resolví los puntos secuenciales necesarios para la tarde de ese día; para el almuerzo que tuvimos el mediodía del martes

en mi oficina, ¡sorpresa, encontramos un error!... según recuerdo ahora, habías anotado un valor positivo en algún punto determinado de la permutación 0 donde se necesitaba un valor negativo. Me sentí tan mal por tu descontento que recuerdo haberte llamado temprano en la noche para decirte que no sólo me había sucedido este tipo de cosas muchas veces, sino que estoy seguro de que les había sucedido a todos los matemáticos. Estábamos realmente desmotivados. Si mi memoria no falla, el martes 14 de noviembre a eso de las 22:40 horas te llamé, para decirte que, con ese mismo programa, había solucionado las partes adicionales de adyacencia del problema, por lo que el Caso No. 8 fue por fin resuelto.”

Al paso del tiempo y al regreso de una estancia académica en el medio oeste de Estados Unidos, Ted Youngs retomó la situación al trabajar con $n = 35$. Organizó una extensa tabla que incluía todos los valores posibles, y de repente, todo empezó a tomar sentido. Youngs y Ringel checaron cuidadosamente los valores establecidos en aquella tabla y su respectiva gráfica y no encontraron errores en la parte correspondiente a la adyacencia adicional del problema. Es así que Youngs intuyó que esta propuesta con $s = 2$, podría funcionar de forma general, para todos los casos s .

Escribieron la propuesta generalizada y todo estaba listo para publicar la solución final de la manera más elegante posible, pero, de hecho, ya se había encontrado, cuando Youngs y otro investigador de apellido Gustin, habían tratado de obtener una solución aproximada para la Conjetura de Heawood, exactamente el martes 6 de octubre de 1964. “Esto es maravilloso y ambos sabemos que no existe alguna mejor propuesta que se pueda hacer para el Caso No. 11”. Termina la carta con la firma de J. W. Ted Youngs.

Para la primavera de 1970, ambos investigadores se volvieron a reunir en el Instituto de Matemáticas en Oberwolfach, Alemania por lo que decidieron escribir un libro sobre el Teorema del Coloreo de Mapas e iniciaron con una propuesta de su contenido. Sin embargo, para el verano de ese año J. W. Ted Youngs había fallecido un poco antes de que acordaran iniciar el libro, que finalmente fue terminado por G. Ringel.

El texto incluye una colección de problemas interesantes propuestos por Ringel y generados durante tres cursos sobre Teoría de Grafos y Teoremas sobre Coloreo, uno de ellos en Berlín y dos en Santa Cruz. Para aquel año de 1974 los lectores experimentados sobre el tema encontraron muchas mejoras respecto del tema que no estaban publicadas todavía, a pesar de que la redacción del libro no fue hecha con lenguaje más abstracto y de un estilo más formal pues el propósito central del autor fue hacerlo más entendible para los jóvenes estudiantes de la época (y aun en años actuales).

La obra está dividida en doce capítulos. El primero, Problemas, Ilustraciones e historia contiene el antecedente sobre la forma de resolver un problema aparentemente trivial, inclusive de carácter escolar, vinculando aquí el Problema del Hilo y las Superficies Unilaterales. Heawood había propuesto la prueba de la desigualdad: $\chi(S_p) \leq \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}$ para $p \geq 1$. El convenio utilizado para χ significa el número entero más grande, pero no mayor que χ . El trabajo conjunto de Youngs y Ringel en 1968 tuvo frutos, pues se demostró que: $\chi(S_p) = \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}$ para $p \geq 1$, en otras palabras, la Conjetura de Heawood quedó probada. Con relación al problema del hilado, también quedó resuelto

ese mismo año, demostrando la expresión: $\gamma(n) = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$, con $n \geq 3$ (donde el lado derecho de la expresión significa el número entero más pequeño, pero no menor que χ). Las superficies unilaterales se abordan apoyándose en el concepto de la Banda de Möbius M_q . La expresión general: $\chi(M_q) = \frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}$, con $q \neq 2$ ya la había probado Ringel en 1964 en su artículo *Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen* (Determinación del número máximo de zonas vecinas en zonas no orientables) publicada en Math. Ann. No. 127; pp. 181-214.

El capítulo 2 titulado Teoría de Grafos contiene una excelente descripción sobre los números cromáticos, las rotaciones de grafos y los casos orientables 7 y 10. Los números cromáticos se abordan axiomáticamente bien con 4 Teoremas, todos demostrados, salvo el primero que entra en la categoría de una definición (a juicio de los editores): Si $P_1, P_2, \dots, P_{\alpha_0}$ son los vértices de un grafo, entonces se tiene la siguiente igualdad $\sum_{i=1}^{\alpha_0} \text{val } P_i = 2\alpha_1$, donde α_1 representa el número de arcos en G . A continuación, Ringel describe las siguientes condiciones: 1) Si H y G son dos grafos y si cada vértice y cada arco de H están contenidos en G , en consecuencia, H es un subgrafo de G . 2) Si ambos grafos no son iguales, entonces H es un subgrafo propio de G . Y continua con más definiciones que indudablemente sustentan las demostraciones de los otros tres Teoremas: a) Se denomina un grafo n – *coloreable* si a cada uno de sus vértices se le puede asignar uno de los n colores, con la condición de que ninguno de los vértices consecutivos tenga el mismo color; b) el número cromático $\chi(G)$ de un grafo G es el mínimo número k , tal que G es k – *coloreable*, pero no $(k - 1)$ – *coloreable*; c) un grafo G se denomina crítico, si cada subgrafo propio tiene un número cromático más pequeño que el de G . Las rotaciones de grafos son abordadas clasificando las rotaciones al denotar los vértices del grafo con los números enteros positivos y el cero y ordenándolos en forma de matrices cuadrangulares. Se presentan tres teoremas, todos demostrados y en los que se incluye la Teoría de congruencias, concretamente la aritmética modular; el último Teorema demuestra la existencia del concepto denominado Rotación Triangular para un Grafo completo K_n , que sustentará los Teoremas del apartado referente a Casos Orientables 7 y 10 y que inicia con la definición de la Regla Aditiva: Para obtener una fila i , agrega i a cada elemento sobre la fila 0 sin modificar su orden. Esta adición se realiza en el grupo Γ , utilizado para representar los vértices. Si existe la expresión $z \notin \Gamma$ sobre la fila 0, este define la igualdad $z + i = z$. Si bien esta regla no precisa la forma de encontrar la fila z , el autor remite a otra regla denominada Δ^* . Este apartado consta de tres Teoremas, el último de ellos denominado Ley de la corriente global de Kirchhoff.

El capítulo 3 denominado Clasificación de Superficies se refiere a objetos matemáticos como Topología, poliedros, operaciones elementales, formas normales de superficies orientables y no orientables, modelos estándar y poliedros parciales. Así como lo comentó en el prefacio, la parte referente a Topología no está escrita de forma axiomática ni formal, sino que es más bien descriptiva dando la idea precisa del concepto al lector. El apartado referente a los poliedros lo describe utilizando lenguaje visual a través de figuras que representan objetos específicos, como la Botella de Klein, sin embargo, es formidable la forma en que se comunica la relación entre estos objetos matemáticos. Con base en la descripción de los poliedros, Ringel propone cuatro Operaciones elementales utilizando

la idea general de la descripción de todos los posibles tipos de poliedros: 1) subdivisión de dimensión uno (SU 1); 2) subdivisión de dimensión 2 (SU 2); 3) composición de dimensión 1 (CO 1); composición de dimensión 2 (CO 2). En ellos involucra muy bien la conocida característica de Euler. Una consecuencia inmediata de estas operaciones la establece el autor en forma de Teorema, (aunque no está demostrado, más bien prueba el recíproco del mismo, por lo que los editores lo consideramos una proposición: Dos poliedros relacionados elementalmente poseen la misma característica de Euler, y además: o ambos son orientables, o ambos no son orientables. Con respecto a la Forma Normal de Superficies Orientables propone definiciones precisas (o componentes de un algoritmo) que permiten comprender este objeto matemático: 1) Generación de una fila; 2) Normalización simple; 3) Preparación para el manejo de la normalización. Para el estudio de la forma normal para superficies no orientables, propone tres definiciones (o pasos algorítmicos) para entender el objeto matemático: 1) Normalización de cubierta cruzada; 2) Transformación a partir de una manipulación en dos cubiertas cruzadas; 3) Construcción de la forma Normal. Una consecuencia interesante del estudio de la forma normal de superficies no orientables es que la identificación de los lados muestra fácilmente que $P_1 = P'_1 = P_2 = P'_2$ y así sucesivamente. Por ello, toda forma normal (C_q) posee un vértice, q aristas y un polígono. De tal forma que la característica de Euler del poliedro (C_q) esta expresada como: $E(C_q) = 2 - q$. Con base en estos objetos matemáticos el autor propone una breve clasificación de las formas normales:

Forma Normal	Expansión	Característica de Euler.	Orientabilidad
(H_0)	$a a^{-1}$	2	Si ($p = 0$)
(H_p)	$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$	$2 - 2p$	Si ($p = 1, 2, \dots$)
(C_q)	$c_1 c_1 c_2 c_2 \dots c_q c_q$	$2 - q$	No ($q=1, 2, \dots$)

Consecuentemente propone tres teoremas, y con base en su idea de que el texto está dedicado a lectores juveniles, no ofrece demostraciones, sino que invita a deducir la obviedad de los argumentos y que realmente motiva el desarrollo del pensamiento matemático en los lectores. Para el estudio de los Poliedros parciales, Ringel propone tres Teoremas, dos demostrados y uno con importantes anotaciones que motivan el ejercicio de la demostración en los lectores. Involucra el objeto matemático denominado valencia.

El capítulo 4 dedica un importante estudio sobre el Teorema de la Incrustación y propone cinco teoremas, todos probados; incluye el concepto de Homomorfismo, conservando además el rigor matemático al hilar los objetos matemáticos descritos anteriormente como vértice, valencia, incrustación; propone además la definición de grafo planar. En el apartado relativo a Poliedros duales, el autor propone dos teoremas con sus respectivas demostraciones, abordando el objeto matemático denominado mapa, muy importante, considerando el título del libro. Exponemos, dada esta característica este Teorema: Si M representa un mapa sobre una superficie S , entonces el grafo G_M que representa un país se puede incrustar en la superficie S . En la demostración surgen objetos matemáticos como 1 – *esqueleto*, (el resultado de aplicar composiciones de dimensiones 1 y 2 para posteriormente eliminar todos los vértices y aristas originales en

el mapa M); isomorfismo, mapa dual (representado en el plano por el cubo y el octaedro; el dodecaedro y el icosaedro, el tetraedro es dual por sí mismo y el toroide). Continúa el capítulo analizando la desigualdad de Heawood y para ello propone un solo teorema con su respectiva demostración y que vale la pena citar: Si S representa una superficie cerrada con la característica de Euler $E(S) \neq 2$ (es decir, que S no representa a una esfera) entonces existe la siguiente desigualdad: $\chi(S) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24E(S)}}{2} \right\rfloor$. La demostración es muy interesante pues se distingue por incluir dos casos posibles (el autor habla de tres, sin embargo, en este último en el que $E = 2$ no existen ejemplos o contraejemplos que permitan su demostración. Este caso es el celebrado Problema de los Cuatro Colores). El apartado dedicado al Tipo o Género (genus) de un Grafo, el autor incluye la interesante definición: El género, tipo o genus de un grafo $\gamma(G)$ se define como el género o tipo mínimo de una superficie orientable en la que G se puede incrustar. El problema del Hilado, estudiado en el capítulo 1 realmente considera determinar el género o tipo de un grafo completo, ese problema se describió así: $\gamma(n) = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$, con $n \geq 3$; pero ahora, considerando lo siguiente: 1) el segundo Teorema relativo a Grafos sobre superficies que dice: G representa un grafo en el que cada vértice es de valencia igual o mayor que 2. Si G se puede incrustar dentro de una superficie cerrada S , entonces $\alpha_1 \leq 3\alpha_0 - 3E(S)$, donde α representa el número de vértices y arcos del grafo dado; 2) $\alpha_1 \leq 3\alpha_0 - 6 + 6p \equiv \alpha_1 - 3\alpha_0 + 6 \leq 6p \therefore \gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{\alpha_1 - 3\alpha_0 + 6}{6} \right\rfloor$; 3) $G = K_n$, $\alpha_0 = n$, $\alpha_1 = \binom{n}{2}$, se obtiene: $\gamma(K_n) = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$, $n \geq 3$. La prueba de esta expresión se divide en doce casos, dependiendo del tipo de residuo de $n \pmod{12}$. Para el caso de $n \equiv 0, 3, 4$ y $7 \pmod{12}$, el producto $(n-3)(n-4)$ es divisible por 12, por lo que a estos cuatro casos se les considera casos regulares debido a que con estos números n , es posible construir incrustaciones triangulares de K_n en una superficie orientable de género o tipo $\gamma(K_n)$. De aquí se propone un Teorema y su demostración. En el apartado referente a Género no orientable de los Grafos, Ringel propone también un Teorema y su demostración. Para ello, define la expresión $\bar{\gamma}(G)$ como el género o tipo no orientable de un grafo G y menciona las siguientes condiciones: 1) $\alpha_1 \leq 3\alpha_0 - 3E(S)$ con $E(S) = 2 - \bar{\gamma}(G)$; 2) $\bar{\gamma}(G) \geq \left\lfloor \frac{\alpha_1 - 3\alpha_0 + 6}{3} \right\rfloor$, y para un grafo completo; 3) $\bar{\gamma}(K_n) \geq \left\lfloor \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rfloor$, con $n \geq 3$. Pero también existe $\bar{\gamma}(K_n) = \left\lfloor \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rfloor$, con $n \neq 7 \wedge n \geq 3$ (demostrado posteriormente); 4) $\bar{\gamma}(K_7) = 3$. Con estas condiciones, el Teorema propuesto es: Si las condiciones 3 y 4 anteriores son verdaderas, entonces $\chi(N_q) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2} \right\rfloor$ con $q \neq 2$. Es importante resaltar el caso N_2 pues corresponde al objeto matemático conocido como la Botella de Klein y es precisamente el siguiente apartado de este cuarto capítulo. Propone dos Teoremas y sus respectivas demostraciones, y dada la popularidad de la Botella de Klein, solo transcribimos ambos teoremas: 1) El grafo completo K_7 no se puede incrustar dentro de la superficie N_2 . Describe a manera de esolio una matriz cuadrangular 7×7 con números enteros positivos incluyendo el cero para facilitar la percepción visual de la demostración, así como dos reglas que facilitan la interpretación, denominadas Regla R y Regla R*. 2) El número cromático de la Botella de Klein es 6.

El capítulo 5 referente a la Combinatoria de las Incrustaciones incluye el apartado sobre Incrustaciones Triangulares y para detallarlo propone 4 teoremas, probando únicamente el segundo y anotando comentarios que generan ideas intuitivas para su prueba en los 3 restantes. Utiliza la teoría de congruencias, aritmética modular concretamente, así como arreglos cuadrangulares y rectangulares matriciales para facilitar la descripción de los objetos matemáticos citados. Sin embargo, reproducimos el último de ellos, pues lo retoma el autor para concluir brillantemente su trabajo: Si existe una rotación triangular de un grafo G , entonces existe una incrustación triangular de G dentro de una superficie orientable. Ringel propone un interesante escolio que bien puede interpretarse como la prueba de esta proposición, pues sustenta la propuesta con teoremas anteriores y condiciones interesantes. El apartado sobre casos especiales orientables lo describe completamente con esquemas basados en arreglos cuadrangulares y rectangulares, la Regla R^* concretamente para: $n = 8$; $n = 9$; $n = 10$, $n = 11$; $n = 12$, $n = 13$; $n = 14$; $n = 18$; $n = 20$; $n = 23$. El último apartado del capítulo versa sobre la esquematización para casos generales en el que propone un único teorema con su respectiva demostración.

El sexto capítulo analiza detalladamente los casos números 1, 4 y 9 y partiendo de la siguiente premisa: Se genera una incrustación triangular de K_n dentro de una superficie orientable para cada n de la forma $n = 12s + 4$. Su método propuesto se relaciona con el producto directo de dos grupos cíclicos, o el grupo $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s+2}$ y que consiste en todos los pares ordenados (a, b) tal que $a \in \mathbb{Z}_2 \wedge b \in \mathbb{Z}_{6s+2}$. La adición, como operación de grupo está definida por la igualdad: $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ y su elemento de identidad es $(0, 0)$ y se enlistan escribiendo primero el elemento a y después el elemento b para todo par ordenado. Cuando $n = 4$, se genera un arreglo cuadrangular de 4×4 y que lo conforma los pares ordenados que facilitan la descripción y tomando en cuenta la Regla R^* que sostiene que la fila $(0, 0)$ genera las demás filas a través del principio aditivo. Utiliza el autor la Regla de Corriente de Kirchhoff para esquematizar la descripción de este proceso. Utiliza el término arreglos aritméticos en forma de peine, como auxiliar en la distribución de los elementos o números de una gráfica colocados sobre los peldaños de una escalera, en la que una secuencia aritmética alterna dirección sobre los peldaños. Al apreciar los esquemas, se percibe claramente esta distribución y su similitud con un peine. Con estas ideas se da solución al caso No. 1. Otra técnica para esquematizar las soluciones, la denomina el autor Esquema en Espiral, en la que los números representados por puntos están alineados, pero su conexión se esquematiza en forma de una espiral, cuyos puntos o números exteriores son el principio y los centrales el término de dicha espiral. Con estas ideas, propone solución para el caso No.9.

El capítulo 7 incluye la solución para los casos números 11, 2 y 8. Se basa en los objetos matemáticos utilizados en capítulos anteriores para proponer la solución para el caso No. 8. Sin embargo, hace referencia a una condición necesaria al proponer el objeto matemático denominado el Problema de la Adyacencia Adicional. Considera un mapa dual de incrustaciones triangulares definidas por $K_{12s+1} - K_5$. Consecuentemente este mapa tiene $12s + 11$ países identificados como $0, 1, \dots, 12s + 5, x, y, a, b, c$. Cada vértice incide en tres países y tres arcos, por lo que cualesquiera dos países son adyacentes a menos que ambos países se encuentren en el conjunto excepcional de los cinco países

x, y, a, b, c y con base en las manipulaciones descritas anteriormente se generan modificaciones necesarias para abordar la solución a los casos descritos en este capítulo.

El capítulo 8 hace referencia a los casos no orientables de índice 1. Ringel propone el método del dobléz para iniciar la descripción del arreglo cuadrangular propuesto para este caso, además de utilizar la Regla R y proponer un Teorema y su demostración que fundamentan la solución para los casos no orientables números 0, 3, y 7. Aquí presenta otro método denominado “Cascadas”, considerado útil en las incrustaciones no orientables. Para ello, se considera un grafo de valencia 3 que describe un flujo en movimiento, a manera de una corriente acuática a, b, c dispuestos en forma vertical, donde a es el punto superior, b y c son los puntos inferiores, ambos paralelos entre sí y a es perpendicular sobre el punto medio de estos dos, con la condición: $a + b + c = 0$. Consecuentemente, el registro del circuito produce una fila 0. El esquema es útil para representar arreglos como por ejemplo $\mathbb{Z}_{16}$.

El capítulo 9 propone soluciones para los índices 2 y 3. Para ello, el autor recurre a la exposición de ejemplos ilustrativos en lo que utilizan el método de incrustación triangular de índice superior a partir de grafos de flujo y cuyo resultado es la generación de un arreglo cuadrangular 15×15 , expresado de esta manera: Para cada elemento $i \equiv a \pmod{3}$ la fila i se obtiene a partir del registro del circuito $[a]$ agregando $+i$ a los elementos de la fila y sin realizar cambios en el orden $a = 0, 1$ o 2 . Con base en estas ideas, propone la solución para los casos orientables números 3 y 5. Con la ayuda de un diagrama derivado del método del peine con algunas variantes, propone solución para el caso orientable No. 6 ya que, en palabras del autor, es más complicado. Ringel parte de la igualdad $n = 12s + 6$ para utilizar los elementos del grupo $\mathbb{Z}_{12s+3}$, los símbolos x, y, z y así identificar los $n = 12s + 6$ vértices del grafo $K_n - K_3$. La propuesta de solución para el caso no orientable No. 9 se basa en el método de cascada y utilizando elementos del grupo $\mathbb{Z}_{12s+9}$ para representar los vértices de K_{12s+9} .

En el capítulo 10 se describe el método para la construcción por inducción. En el primer apartado analiza la inducción para un índice 3 y dar solución a los Casos números 1 y 7. Para ello, Ringel propone 4 teoremas (dos con demostración) todos referentes a incrustaciones triangulares. El siguiente apartado lo dedica al análisis de la inducción de índice 2. Escribe tres teoremas y sólo el último queda demostrado. Con relación al segundo Teorema (Proposición) hace mención que en esa época no existía una prueba relativa a la existencia de una incrustación no orientable de $K_n - K_2$ para $n \equiv 8 \pmod{12}$. El último apartado del capítulo lo dedica a dar solución a los casos no orientables números 1, 2, 6 y 10 aplicando la inducción. Propone tres Teoremas, todos demostrados, axiomatizando ordenada y lógicamente los objetos matemáticos descritos anteriormente, puntualizando en la idea de incrustación triangular.

El capítulo 11 está dedicado exclusivamente al caso orientable 0 y siguiendo la línea de las incrustaciones orientables triangulares de K_{12s} . La segunda parte de este capítulo describe ejemplos ilustrativos para facilitar las ideas. Además, incluye el objeto matemático denominado permutación y proponiendo ahora dos Lemas con sus respectivas demostraciones. En la tercera y última parte del capítulo expone la descripción de la solución general. Dado el número $n = 12s$, existen las variables r y k , tal que se tiene la igualdad $s = 2^{k-2}(2r + 1)$. Entonces 2^{k-2} representa la más alta potencia

posible de 2 que divide a s . Propone la existencia de un grupo que representa asociatividad multiplicativa de sus elementos y que es exactamente $12 \cdot 2^{k-2} \cdot (2r + 1) = 12s$ elementos. Sin embargo, aquí hace mención de que no existía en esa época una representación gráfica explícita de este objeto matemático. Escribe tres lemas para este apartado incluyendo sus demostraciones formales.

En el capítulo 12 -*último de esta obra*- el autor describe algunos de los problemas que enfrentó durante su investigación. En el primer apartado, menciona los problemas acerca de las rotaciones. Uno de ellos se relaciona con el hecho de que un grafo con un solo vértice y sin arcos se le denomina trivial, además la conectividad de un grafo conectado G está representado por el número más pequeño de vértices cuya eliminación da por resultado un grafo discontinuo o un grafo trivial. En el segundo apartado describe los problemas relativos a incrustaciones, mencionando la interesante conjetura propuesta por R. H. Fox: Sea G un grafo con exactamente 12 vértices de valencia 5 y todos los otros vértices de valencia 6. Si el número de vértices de G está representado por un número n , entonces G no es plano. Ringel escribe un escolio respecto a esta conjetura: La incrustación de un grafo G dentro de una superficie cerrada S se denomina incrustación celular si G divide a S en únicamente 2 -*células* (por ejemplo, las lúnulas, los triángulos, los cuadriláteros, etc.). Si S es orientable la incrustación induce de forma natural una rotación de G . Debido a que existen dos formas diferentes de orientar la superficie S , la incrustación induce dos rotaciones diferentes de G , en la que una es exactamente la opuesta de la otra. Como lo describimos en la reseña del Capítulo 5, Ringel cierra magistralmente su libro con la generalización del último teorema de la primera parte de ese capítulo, y que fue propuesta por J. Edmonds en su trabajo denominado “*A combinatorial representation for Polyhedral Surfaces*” (Una representación combinatoria para superficies de poliedros) publicado en *Notices American Mathematical Society* No. 7 (p. 646) en 1960.

También aclara Ringel que otro investigador, L. Heffter también conocía esta generalización pues la utilizó con mucha frecuencia en sus investigaciones y no solamente para incrustaciones triangulares, por ejemplo, en su trabajo titulado “*Über das Problem der Nachbargebiete*” (Sobre el problema de las zonas vecinas), publicado en *Math. Ann.* 38 (pp.477-508) en 1891. Ringel lo denomina el Teorema de Heffter y Edmonds: Dado un grafo con rotación, existe una incrustación celular del grafo dentro de una superficie orientable, tal que una de las dos rotaciones inducidas por la incrustación es exactamente la rotación dada por el grafo. El autor escribe la demostración para este teorema y como consecuencia, propone el Teorema: Sea $n \geq 21$. Entonces el grafo $K_n - K_3$ se puede incrustar triangularmente dentro de una superficie orientable sí y solo si $n \equiv 1, 6, 9 \text{ o } 10 \pmod{12}$. También escribe la demostración de manera clara y concisa terminando aquí esta maravillosa obra matemática.

El texto se apoya en 104 referencias que enriquecen notablemente la aportación de G. Ringel.

Cabe destacar que en el conocido libro realizado por Thomas Saaty y Paul Kainen en 1977 titulado “*The Four Color Problem. Assaults and Conquest*”, publicado por editorial Mc Graw Hill en Gran Bretaña, el texto de Ringel es citado frecuentemente, así como otras contribuciones de este autor relacionadas con el tema.

Más recientemente en el libro de Rudolf Fritsch y Gerda Fritsch titulado “*Der Vierfarbensatz*” (El Teorema de los Cuatro Colores) publicado por Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus en 1994 y republicado por Editorial Springer, Nueva York con el título “*The Four Color Theorem*” en 1998 también está frecuentemente citado el texto de Ringel y en esta obra está clasificado como un texto de colección, además de otros trabajos publicados por este autor relacionados con el tema. Estas distinciones confirman nuestra opinión como equipo de investigación sobre la importancia que ha tenido esta magnífica obra en el desarrollo de este objeto matemático y por ende la propuesta de dedicarle el Simposio Internacional.

Quedamos profundamente agradecidos con las autoridades de la Biblioteca Vasconcelos por todo su apoyo, así como las facilidades que nos brindaron desinteresadamente para llevar a buen término este evento académico. En primer lugar, al director de la biblioteca Vasconcelos, el Dr. José Mariano Leyva Pérez Gay; así como al encargado de actividades culturales Jorge Antonio Hernández Reyna y a la encargada de la coordinación de programación del evento Alin Escoto Torres y a todo el personal de la biblioteca que generosamente realizó algún trabajo extra. Muchas gracias a todos incluyendo a nuestro personal de staff por su excelente trabajo y apoyo incondicional.

Los editores.

A continuación, se incluye la parte del discurso inaugural relativa al Primer Simposio Internacional del Problema de los Cuatro Colores pronunciado por el presidente del evento Académico, Dr. Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Para el día viernes 15 de marzo, se presentarán reportes de investigación en el Simposio Internacional sobre el Problema de los Cuatro Colores y la Teoría de Grafos.

Una de las características editoriales del JOOM es publicar acontecimientos históricos en el quehacer matemático que han sucedido en secuencias calendáricas idénticas al año de emisión de la revista electrónica, es decir, que sucedieron el mismo nombre de día. Esto significa, astronómicamente estar en muy aproximadamente la misma posición de la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol. En este sentido, el año de 1968 tuvo la misma secuencia de nombres de días en el calendario y también 1974, a partir del viernes 1 de marzo, entre otros muchos años con estas características al presente año de 2024. Además, es común identificar acontecimientos que suceden cada 50 o 100 años, inclusive 150 años como lo ha hecho la revista Scientific American.

Por ello, 1974 tiene este distintivo. Calcular o identificar qué nombres de día coinciden con otros calendarios no es tarea sencilla, pues implica realizar operaciones aritméticas en varios conjuntos con módulos diferentes. En la actualidad, se puede recurrir al uso de las computadoras, pero aun así la tarea resulta tediosa al estar consultando en la

red los calendarios respectivos. Sin embargo, uno de los editores ha desarrollado su propio algoritmo para realizar los cálculos, lo que facilita mucho esta tarea.

G. Ringel en colaboración con J. W. Young realizaron aportaciones muy importantes para la solución del coloreo de mapas en 1968 y publicaron sus resultados hace 50 años.

Así lo justifica la carta enviada a Ringel y escrita por Youngs el viernes 1 de marzo de 1968 y publicada en la edición de 1974 del libro titulado *“El teorema del Coloreo de Mapas”*, por G. Ringel. En dicha carta le hace mención de los casos resueltos (ya que clasificaron sus resultados en conjuntos llamados casos). Estos eran los casos 2, 8 y 11, este último completado por Youngs, quien al terminarlo se toma unos minutos para escribirle a su colega. Le hace recordar el trabajo de ambos en los casos 8 y 10 el martes 14 de noviembre de 1967, concluyendo sus ideas cruciales sobre las adyacencias que habían planteado el 29 de octubre y para el día siguiente Ringel escribió un programa de computadora para generar las posibles soluciones al problema del coloreo de mapas. Así empieza la sistematización y la argumentación matemática de ese problema que daría inicio a la formulación de programas de computadora para dar solución a este aparentemente trivial y escolar problema del coloreo de mapas que saliera a la luz en octubre de 1852, cuando Frederick Guthrie le envió una carta a Augusto De Morgan, donde le contaba sobre cómo su hermano Francis estaba trabajando en un problema que le pareció interesante. De Morgan se mostró también muy interesado, tanto que a su vez le escribió a Rowan Hamilton (quien propuso el objeto matemático denominado cuaterniones) para que diera su opinión y que, por cierto, no se interesó. Sin embargo, se generó entre muchos matemáticos británicos de la época victoriana un interés muy especial y que al paso de los años se expandiría entre la comunidad matemática mundial. El problema parecía sencillo. Se trataba de colorear el mapa de Inglaterra con el mínimo número de colores de tal manera que ninguna región colindante con otra tuviera el mismo color. Martin Gardner publicó una versión del problema para la revista *Scientific American* en 1959. En su artículo da cuenta de algunas curiosidades relacionadas con este problema. Anotaba que no fue del interés de muchos matemáticos, como Hamilton y otros muchos, quienes confirmaban su trivialidad y su origen escolar (de la escuela básica). Pero a otros los cautivó el reto e intentaron darle solución con argumentos axiomáticos muy sólidos, entre ellos Norbert Wiener, quien, tras muchos intentos de solución, no logró proponer soluciones, sin embargo, como lo narra en su libro *“Ex - prodigio”*, los muchos intentos de solución le permitieron desarrollar su talento para las matemáticas. Este sencillo problema ha motivado el desarrollo de la Teoría de Grafos, la teoría de la enumeración, los algoritmos de cómputo relacionados con la programación de algoritmos, y la teoría de números.

Debido a que los resultados de investigación giran en torno a esta narrativa, solo mencionaré los nombres de los trabajos, pues cada investigador comentará los pormenores de lo que hoy se conoce como el Teorema de los Cuatro Colores. Sin duda, el texto publicado en 1974 fue crucial para el desarrollo de posibles soluciones y todavía está en debate el papel de las computadoras en la demostración de soluciones a este problema.

- 1) Modelado Matemático de un algoritmo para comportamiento de enjambres robóticos basados en las restricciones del teorema de los cuatro-colores.

- 2) Exégesis sobre los casos orientables y no orientables de G. Ringel en el estudio del Problema de los cuatro Colores. Antecedentes matemáticos y sus consecuencias.
- 3) Teorema de los cuatro colores aplicado en el pequeño rombicododecaedro.
- 4) Propuestas matemáticas para grafos, teorema de los cuatro colores y probabilidad.

Sin más que comentar, y con el permiso del amable auditorio, declaro inaugurado el Congreso Internacional de Objetos y Objetivos matemáticos y el Simposio Internacional del Problema de los Cuatro colores y la Teoría de Grafos, siendo las 8:52 de la mañana.

Gracias por su atención.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Presidente

Symposium Internacional de Reflexiones y Avances sobre el Problema de los Cuatro Colores y la Teoría de Grafos 2024



www.cioom.org

Journal de Objets y Objetivos Matemáticos

Se complace en invitar a publicar en el evento:

2025 11th International Conference on Control, Decision and Information Technologies

La conferencia CoDIT 2025 es la undécima (11.^a) edición de la serie de conferencias internacionales sobre tecnologías de control, decisión e información, organizadas desde 2013; la anterior, CoDIT 2024, se celebró en La Valeta (Malta) en julio de 2024.

CoDIT 2025 se celebrará del 15 al 18 de julio de 2025 en Split (Croacia). La conferencia sirve como foro de intercambio técnico entre científicos interesados en el control, la automatización, la robótica, la optimización, la toma de decisiones, la cibernética, la informática y las tecnologías de la información. Ofrece una plataforma excepcional para que las comunidades académicas e industriales aborden nuevos desafíos, compartan soluciones y exploren futuras direcciones de investigación. El programa contará con conferencias plenarias, sesiones técnicas regulares y sesiones especiales.

<https://www.codit2025.org/>

Exégesis sobre los casos orientables y no orientables de G. Ringel en el estudio del Problema de los cuatro Colores. Antecedentes matemáticos y sus consecuencias.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Departamento de Matemáticas, Escuela Normal Superior de México, Av. Manuel Salazar No. 201, Colonia Ex-Hacienda El Rosario, Azcapotzalco Ciudad de México, México.

harmendia@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-64838350>

Resumen- El presente artículo de investigación es el resultado de un proceso que inicié hace una década. Presento algunos resultados obtenidos en el Primer Simposio Internacional del Problema de los Cuatro Colores y concluyo esta primera fase de investigación con este objeto matemático. Mi aportación la divido en cinco partes dentro de las que distribuyo cinco teoremas con sus respectivas demostraciones; tres Lemas, también con sus demostraciones, nueve definiciones; tres Notas y quince Escolios. Naturalmente los Escolios son las proposiciones más abundantes dado el título de este artículo, así que mi propósito central es ofrecer comentarios que de alguna u otra manera permitan dar a conocer, interesar o profundizar en este apasionante tema. Como el título lo describe, me centro principalmente en la clasificación de los casos propuestos por Ringel y Youngs relacionados con la Orientabilidad y la No Orientabilidad, dejando para otra ocasión el estudio de los otros objetos matemáticos involucrados.

Palabras Clave- Casos Orientables y No Orientables, Grafos, Teorema del Coloreo de Mapas.

Zusammenfassung- Dieser Forschungsartikel ist das Ergebnis eines Forschungsprozesses, den ich vor einem Jahrzehnt begonnen habe. Mit der Präsentation einiger Ergebnisse des Ersten Internationalen Symposiums zum Vierfarbenproblem schließe ich diese erste Phase der Forschung mit diesem mathematischen Objekt ab. Ich teile meinen Beitrag in fünf Teile, in denen ich fünf Theoreme mit ihren jeweiligen Demonstrationen verteile; drei Lemmata, auch mit ihren Beweisen, neun Definitionen; drei Noten und fünfzehn Scholia. Angesichts des Titels dieses Artikels sind die Scholia natürlich die am weitesten verbreiteten Vorschläge, daher besteht mein Hauptanliegen darin, Kommentare abzugeben, die es uns auf die eine oder andere Weise ermöglichen, dieses spannende Thema bekannt zu machen, zu interessieren oder uns damit zu befassen. Wie der Titel beschreibt, konzentriere ich mich hauptsächlich auf die Klassifizierung der von Ringel und Youngs vorgeschlagenen Fälle im Zusammenhang mit Orientierbarkeit und Nicht-Orientierbarkeit und überlasse für eine andere Gelegenheit die Untersuchung der anderen beteiligten mathematischen Objekte.

Schlagwörter- Graphentheorie, Kartenfärbungssatz, Orientierbare und nicht orientierbare Fälle.

Резюме- Эта исследовательская статья является результатом исследовательского процесса, который я начал десять лет назад. Представляя некоторые результаты Первого международного симпозиума по проблеме четырех цветов, я завершаю первый этап исследования этим математическим объектом. Я делю свой пост на пять частей, в которых распределяю пять теорем с соответствующими демонстрациями; три леммы, а также их доказательства, девять определений; три ноты и пятнадцать схолий. Конечно, учитывая название этой статьи, схолии являются наиболее распространенными предложениями,

поэтому моя главная задача — предоставить комментарии, которые так или иначе позволят нам популяризировать, заинтересовать или заняться этой захватывающей темой. Как следует из названия, я сосредотачиваюсь главным образом на классификации случаев, связанных с ориентируемостью и неориентируемостью, предложенной Рингелем и Янгсом, оставляя для другого случая изучение других задействованных математических объектов.

Тези- Набор раскрасок карты, Ориентируемые и неориентируемые случаи, Теория графов.

Mathematical Subject Classification: 68R05, 05C10.

I. INTRODUCCIÓN

En ocasión del quincuagésimo aniversario de la publicación del libro de Gerhard Ringel titulado Map Color Theorem describo axiomáticamente algunos objetos matemáticos necesarios para abordar su estudio, en primera instancia, el problema del coloreo de mapas y su consecuencia inmediata, el estudio del Problema de los Cuatro Colores. Me enfoco en los objetos matemáticos denominados orientable y no orientable como los conceptos antecedentes y necesarios. Sin embargo, éstos a su vez involucran otros conceptos que son importantes para escribir sus enunciados. No dudo que el lector posee estas nociones, que, para evitar una narrativa muy extensa, no cito. Esta contribución está muy vinculada con lo que se redactó en la Carta Editorial, así que también invito a los lectores a revisarla para tener la idea general sobre lo que expongo con relación a la obra mencionada. El propósito central del texto de Ringel es ofrecer una explicación detallada del fascinante método de la Teoría de la Enumeración (caso particular de los procesos combinatorios) que se desarrollaron durante las décadas de los años cincuenta y sesenta del siglo anterior para intentar dar solución al Problema del coloreo de Mapas para todas las superficies cerradas, con excepción de la esfera. Tal como se expuso en la Carta Editorial, el texto contiene la prueba completa para la expresión de Heawood para el coloreo de mapas vinculados con los números cromáticos de todas las superficies cerradas, con excepción de la esfera y que permaneció alrededor de 8 décadas (a la publicación de la obra) sin tener solución. Una aportación de Ringel fue la inclusión del método de las gráficas de flujo que satisfacen la Ley de Corriente de Kirchhoff para solucionar el problema mencionado; es así que, de forma lógica, muchas condiciones (unas antecedentes y otras consecuentes) acerca

de la teoría cromática de grafos, la rotación de grafos, clasificación de superficies cerradas y la incrustación de grafos dentro de superficies cerradas fueron abordadas con todo detalle por G. Ringel.

II. ANTECEDENTES MATEMÁTICOS.

Escolio 1.- Sobre la Orientación. De acuerdo con Rudyak y Chernavskii [1] este objeto matemático se vincula con la idea de dirección sobre una curva cualquiera lo que permite la definición de clases de espacios bien definidos, como es el caso las fibraciones vectoriales, el Complejo de Poncaré, las variedades topológicas, etc., con la consecuencia de permitir elegir una clase de equivalencia de sistemas de coordenadas eso sí, con la condición de que dos de estos sistemas pertenezcan a la misma clase si están positivamente relacionados.

Definición (Def.) 1.- Sea $E^1, E^2, \dots, E^n$ un espacio afín que posee un sistema de coordenadas a partir de un punto origen y una base.

Def. 2.- Sea $\mathcal{T}$ [2] el grupo de transformaciones en el plano E^n y t una translación. Dado que $t \in \mathcal{T}$; t define el cambio de coordenadas cuando hay cambio de origen y base. Se considera positivo cuando su representación matricial de la base cambia en función de poseer determinante positiva (como es el caso de una permutación par de los vectores en la base).

Consecuencia 1.- Dos sistemas de coordenadas conservan la misma orientación si uno de ellos se puede transformar continuamente en el otro.

Def. 3.- En un plano $(n - 1)$ - dimensional existe la orientación opuesta, denominada reflexión.

Escolio 2.- Una variedad es un objeto matemático muy vinculado con la geometría intuitiva, que generaliza a otro objeto matemático denominado dimensión. Una curva pertenece a $(1 - \text{variedad})$; la superficie a $(2 - \text{variedad}, \text{etc.})$, en el contexto del conjunto de los números Reales $\mathbb{R}$, los números Complejos $\mathbb{C}$, así como en los arreglos matriciales rectangulares.

Escolio 3.- Toda familia de sistemas coordenados puede conectarse a sistemas dados al depender continuamente de que exista $t \in [0,1]$; (Def 2).

Def. 4.- Toda generalización del triángulo y tetraedro a dimensiones arbitrarias se conoce como Simplex y es también el Polítopo más simple en una dimensión dada [3]. $0 - \text{simplex}$ representa un punto; $1 - \text{simplex}$ un segmento de línea; $2 - \text{simplex}$ un triángulo; $3 - \text{simplex}$ un tetraedro.

Consecuencia 2.- Un simplex está orientado cuando se caracteriza por un orden fijo de vértices con permutación par.

Escolio 4.- Un ejemplo característico y que en el presente estudio vincula al Problema del Coloreo de Mapas, lo describen Rudyak y Chernavskii [1]. En una variedad conectada M , el sistema de coordenadas adopta la forma de un atlas. Así el conjunto de mapas tiene por cubierta M ; el atlas está orientado si las transformaciones de coordenadas entre los mapas son todas positivas; por lo tanto, si el atlas existe, entonces M existe. De esta manera, todos los atlas orientados poseen dos tipos de clases, de modo que la transición de los mapas de un atlas a los mapas del otro es positiva sí y solo si ambos atlas pertenecen a la misma categoría. Una elección para este tipo de clase se denomina una orientación de variedades. Así una dirección de rotación (como elemento de una transformación $\mathcal{T}$, (Def. 2) sobre un círculo se puede

definir al escoger un vector tangente. En consecuencia, cuando la variedad M posee un límite y está orientado, entonces este límite también está orientado.

Def. 5.- Homomorfismo [3] es aquella función que conserva las relaciones de operación entre dos estructuras algebraicas siempre del mismo tipo.

Escolio 5.- Existe un grupo fundamental definido por la relación $\pi_1(M, x_0)$ como una consecuencia de la existencia de una o más variedades M y una secuencia de puntos en una $1 - \text{variedad}$ (Escolio 2) en un lugar puntual $\pi_1 1 - \text{simplex}$ (Def. 4), pero dentro de un grupo de orden 2, es decir se genera un homomorfismo. Entonces, la orientación de los bucles de los grupos de inversión se relaciona con la unidad y su simétrico. Se interpreta como la generación de una capa o cubierta de doble hoja para el caso de las variedades no orientables (caso contrario a lo establecido en el Escolio 1).

Def. 6.- Toda variedad triangulada M es orientable si existe la posibilidad de orientar todos los $n - \text{dimensional}$ simplex o simpliciales, de modo que dos de ellos con una cara $(n - 1)$ -dimensional en común, pueda inducir orientaciones opuestas sobre dicha cara.

Def. 7.- Existe un procedimiento que permite asociar algún objeto matemático (espacio topológico o grupo) con una sucesión de Grupos Abelianos (en el sentido de módulo), denominado homología [3].

Consecuencia 3.- El objeto matemático denominado generador, o genus, indica la existencia en algunas partes de la línea, el plano o el espacio carentes de lugares geométricos (comúnmente llamados agujeros). Las propiedades de un grupo indican la estructura del espacio topológico, tal como lo indican las ideas de dimensión y orientabilidad.

Def. 8.- Existe el objeto matemático denominado isomorfismo como una consecuencia del hecho de que un homomorfismo admite un inverso, pero conservando la estructura idéntica; por consiguiente, dos objetos isomorfos poseen las mismas propiedades. Una consecuencia directa es la existencia de automorfismo, es decir, un isomorfismo de una estructura matemática sobre sí misma.

Escolio 6.- La orientación también se puede explicar en el sentido de la Def. 7 [1]. Existe una variedad orientable conectada sin límite, denominada Grupo homólogo y representado por: $H_n(M; \mathbb{Z})$ y además con la existencia de lugares topológicos cerrados (soportes). En consecuencia, se le considera isomórfico en $\mathbb{Z}$, (Def. 8). En este sentido [2] [3] un simplectomorfismo es un automorfismo de una variedad simpléctica; una permutación es un automorfismo de un conjunto dado. Los isomorfismos y automorfismos son sinónimos de las transformaciones geométricas. Estos objetos matemáticos definen también una orientación, u objetos matemáticos orientables. Caso contrario, a los objetos matemáticos no orientables. Así, $H_n(M; \mathbb{Z})$ representa una orientabilidad que es homotópica de la variedad M . La Banda de Möbius y un anillo poseen una misma clase homotópica, pero un distintito límite [1].

Consecuencia 4.- la interpretación homológica de la orientación permite que este concepto pueda aplicarse a las variedades homológicas generalizadas.

III. EL PROBLEMA DEL COLOREO DE MAPAS.

Def. 9.- En los digrafos (grafos dirigidos u orientados) [4] el arco c que une los vértices A, B posee dos posibles

orientaciones; una esta representada por el par (A, B) ; la orientación opuesta por el par (B, A) .

Escolio 7.- Una orientación es la asignación de una dirección a un arco dado. Esta noción es importante en el inicio del estudio de los grafos sobre las superficies [4].

Teorema 1.- Si dos grafos G, G' son homomórficos, entonces su vertices $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha'_0 \rightarrow \alpha'_1$.

Prueba: Por los Axiomas de Congruencia (relación entre segmentos sobre dos líneas) [5], se conserva la igualdad entre los lugares geométricos que forman parte de los grafos G, G' , por lo tanto, son homomórficos (Def. 5) ■

Escolio 8.- El siguiente Teorema es fundamental en [4], y es consecuencia inmediata, entre otras ideas, (revisar la Carta Editorial) del estudio relacionado con el concepto de orientación y orientabilidad.

Teorema 2.- Sea G un grafo en el que todos sus vertices poseen valencia ≥ 2 . Si G se puede incrustar dentro de la superficie S y además se conserva la igualdad $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S)$, existe un poliedro F sobre S con la consecuencia de que G es isomórfico al $1 - esqueleto$ de F , además de que todas sus caras son triángulos.

Prueba: Hipótesis: G se puede incrustar dentro de la superficie S . Para que la hipótesis sea verdadera, debe existir un poliedro F sobre S , además de un subgrafo G' de característica $1 - esqueleto$ de P con la condición de que G' sea homomórfico G . Dado que los objetos matemáticos $P, S, G', 1 - esqueleto$ están definidos en [4] F (pp. 35, 39, 48); S en [2] [3]; G' en [4] (p.10), $1 - esqueleto$ en [4] (p. 55). Por el Teorema de la Incrustación [4] (p. 55) la hipótesis resulta verdadera. Ahora, la igualdad $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S)$ es el corolario del Teorema inmediato anterior a este [4] y posee su prueba, por lo que es un argumento que completa esta demostración. En consecuencia, el grafo y el subgrafo G' son homomórficos (Def. 5) y por ello G es isomórfico al $1 - esqueleto$ de F (Def. 8). Finalmente, un corolario del Teorema inmediato anterior enuncia que la forma cerrada mas corta posible en G posee al menos tres arcos, por lo que cada polígono del poliedro F tiene al menos tres aristas lo que justifica que las caras son triángulos. ■

La consecuencia inmediata es el siguiente enunciado:

Teorema 3.- Si existe una incrustación triangular de un grafo G dentro de una superficie S , entonces la igualdad $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(S)$ se conserva.

Este Teorema está demostrado en [4] (p. 59).

Escolio 9.- La prueba para este Teorema resulta interesante y se presta para una mayor profundización; sin embargo, solo resalto el proceso que comenta el autor. Hace referencia a observar el número de triángulos en la incrustación mencionada, generalizada como α_2 . Entonces se genera la igualdad: $3\alpha_2 = 2\alpha_1$. Al sustituir esta última expression en $E(S) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ (muy conocida como la Fórmula de Euler), se obtiene la expression mencionada en el Teorema 3.

Escolio 10.- Un poliedro orientable [4] se genera cuando es posible elegir una orientación para cada polígono, de tal manera que exista la posibilidad de que cada arista se utilice en ambas direcciones. Cuando es posible realizar simultáneamente el cambio de todos los elementos en una fila y además revertir el orden cíclico en esa fila, un poliedro es orientable. Esta operación simultánea está basada en las

Operaciones Elementales [4]: Subdivisión de dimensión 1; Composición de dimensión 1; Subdivisión de dimensión 2; Composición de dimensión 2 (SU 1, CO 1, SU 2, CO 2). En la Carta Editorial se transcribe la tabla que Ringel elaboró sobre el hecho de que cada poliedro esta elementalmente relacionado con la característica de Euler, la orientabilidad y su forma Normal. (Recomiendo al lector remitirse a esa parte al principio de este número). Su consecuencia inmediata la redacta el autor de la siguiente manera:

Teorema 4.- Dos poliedros están elementalmente relacionados sí y solo si ambos poseen la misma característica de Euler y si ambos son orientables o ambos son no orientables.

Prueba: Existe una condición necesaria, debido a que existen dos poliedros elementalmente relacionados que poseen la misma característica de Euler y ambos o son orientables o no lo son. [4] (Primer Teorema de las formas normales para superficies orientables). El conjunto de todos los poliedros se divide en clases de pares disjuntos, de manera tal que dos poliedros pertenecen a la misma clase con la condición necesaria de que estén elementalmente relacionados. En cada clase existe un poliedro en su forma más simple, denominado poliedro normal de esa clase. Además, la orientación queda definida (Def. 7; Escolio 6), así como el caso contrario, orientación no definida. ■

Escolio 11.- La solución al Problema del Coloreo de Mapas la propuso el autor en colaboración con Ted Youngs clasificando las condiciones necesarias en dos conjuntos, denominados Casos Orientables y Casos No Orientables. Es una secuencia axiomática que vincula objetos matemáticos que demuestran la solución, por esta razón estos casos no aparecen ordenadamente, de acuerdo con la serie de números enteros positivos y el cero. Se dan a conocer con base en la descripción de los objetos matemáticos inherentes. En las tablas 1 y 2 describo la secuencia de los casos listados en el texto, y el nombre del objeto matemático relacionado:

Tabla 1. Casos Orientables.

Caso	Objetos Matemáticos relacionados.
7	Números Cromáticos; Rotaciones de Grafos.
4	Método aritmético denominado Peine; método de diagramas de enrollamiento.
1	Método aritmético denominado Peine; método de diagramas de enrollamiento.
9	Método aritmético denominado Peine; método de diagramas de enrollamiento.
11	Problema de la Adyacencia Adicional.
2	Problema de la Adyacencia Adicional.
8	Problema de la Adyacencia Adicional.
3	Soluciones de Índice 2 y 3. Método de diagramas de flujo y de la Regla R* (Ver Carta Editorial)
5	Soluciones de Índice 2 y 3. Método de diagramas de flujo y de la Regla R* (Ver Carta Editorial)
6	Soluciones de Índice 2 y 3. Método de diagramas de flujo y de la Regla R* (Ver Carta Editorial)
0	Diagramas de flujo a partir de Grupos No Abelianos.

Tabla 2. Casos No Orientables.

Caso	Objetos Matemáticos relacionados.
------	-----------------------------------

0	Índice 1. Método de la Duplicación. Método de Cascadas.
3	Índice 1. Método de la Duplicación. Método de Cascadas.
7	Índice 1. Método de la Duplicación. Método de Cascadas.
9	Soluciones de Índice 2 y 3. Método de diagramas de flujo y de la Regla R* (Ver Carta Editorial)
1	Índices 2 y 3. Construcción por Inducción.
2	Índices 2 y 3. Construcción por Inducción.
6	Índices 2 y 3. Construcción por Inducción.
10	Índices 2 y 3. Construcción por Inducción.

IV. CONSECUENCIAS.

Escolio 12.- La primera consecuencia surge de manera formal cuando Ringel expone la Desigualdad de Heawood con todo detalle. La relación $M \subset S \equiv G \subset S$, que indica que un grafo se puede incrustar en alguna superficie. (M representa un Mapa, de acuerdo con Heawood). Así, el número cromático $\chi(S)$ de una superficie cerrada S puede expresarse entonces así: $\chi(S) = \max_{M \subset S} \chi(M)$ [4] en el que desde luego un máximo valor se tiene de todos los posibles mapas M sobre la superficie S , aunque para la época no se podía demostrar su existencia, y tampoco era fácil probar que es posible sustituir grafos por mapas. Pero en la expresión $\chi(S) = \max_{G \subset S} \chi(G)$, se describe el máximo valor posible sobre todos los grafos G que se pueden incrustar dentro de la superficie S . De este modo, para cada mapa M sobre una superficie S , que bien se puede interpretar como el grafo G_M y que es incrustable y se demuestra con el primer Teorema relacionado con Poliedros Duales [4] que afirma lo siguiente: Si M es un mapa sobre la superficie S entonces los países grafo G_M se pueden incrustar dentro de la superficie S . Ringel ofrece la prueba, de forma muy intuitiva y él mismo asegura que es muy cuestionable debido a que no se fundamenta en la teoría de las superficies. Sin embargo, ofrece una explicación bastante detallada y convincente, basada en un esquema que permite visualizar con mejor detalle la veracidad de la afirmación en el teorema propuesto [4] (p. 61). Entonces, es posible escribir la desigualdad: $\max_{G \subset S} \chi(M) \leq \max_{G \subset S} \chi(G)$. Se observa, además, que el recíproco de esta desigualdad es consecuencia inmediata del hecho de que para cada grafo G sobre una superficie S existe un mapa M también sobre esa misma superficie S , descrito en segundo teorema relacionado con Poliedros Duales, que sostiene: Si todo grafo G se puede incrustar dentro de una superficie S , entonces existe un mapa M sobre S tal que el grafo G es isomórfico respecto a un subgrafo de un país grafo G_M . La prueba que escribe Ringel se basa en subdivisiones y composiciones de las dimensiones 1 y 2, tal como se apoyó en la explicación visual del primer teorema. Esto genera la desigualdad: $\chi(M) \leq \chi(G)$.

Escolio 12.- Para abordar la primera consecuencia de este estudio, es necesario retomar la propuesta de Heawood en 1890, aunque la demostración propuesta por él no es lo suficientemente precisa, además que sólo consideró las superficies orientables. La expresión para determinar el número cromático se expresa en el siguiente Teorema.

Teorema 5.- Si S representa una superficie cerrada con la característica de Euler $E(S) \neq 2$ (es decir S no representa una esfera), entonces existe la siguiente desigualdad: $\chi(S) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24E(S)}}{2} \right\rfloor$.

Prueba: Existe un grafo G incrustable en una superficie S con la condición $\chi(S) = \chi(G)$ (como consecuencia de valor igual máximo, Escolio 12). Por hipótesis, G toma un valor crítico. Por el cuarto Teorema de los números cromáticos que afirma que si el grafo G es crítico con respecto al número cromático χ , entonces la valencia de cada vértice del grafo G es menor o igual que $\chi - 1$, demostrado en [4] (p. 12) y por el segundo Teorema correspondiente a los Teoremas de Incrustación que afirma: en un grafo G en el que cada vértice posee valencia ≥ 2 , y si ese grafo G se puede incrustar dentro de una superficie cerrada S , entonces se tiene que $\alpha_1 \leq 3\alpha_0 - 3E(S)$. (Demostrado en [4] (pp. 55-56) se puede afirmar que para $\chi(G) = \chi \wedge E(S) = E$, tenemos:

$$2\alpha_1 \geq \alpha_0(\chi - 1) \quad (1)$$

$$3\alpha_0 - 3E \geq \alpha_1 \quad (2)$$

$$6\alpha_0 - 6E \geq \alpha_0(\chi - 1) \quad (3)$$

$$\therefore 6 - \frac{6E}{\alpha_0} \geq \chi - 1. \quad (4)$$

Por lo que es necesario considerar tres casos:

Hipótesis 1) $E \leq 0$.

Con base en la desigualdad $\alpha_0 \geq \chi$, se sustituye α_0 por χ en (4):

$$\chi^2 - \chi \leq 6\chi - 6E \quad (5)$$

Reescribiendo, tenemos:

$$\chi^2 - 7\chi + 6E \leq 0 \quad (6)$$

Por lo tanto:

$$\left(\chi - \frac{7 + \sqrt{49 - 24E}}{2}\right) \left(\chi - \frac{7 - \sqrt{49 - 24E}}{2}\right) \leq 0 \quad (7)$$

Ya que, por hipótesis $E \leq 0$ es obvio que el discriminante $\sqrt{49 - 24E} \geq 7$, y como $\chi \geq 1$, el segundo factor en (7) es siempre positivo y en consecuencia el primer factor es ≤ 0 . ■

Hipótesis 2) $E = 1$

S se localiza en una superficie no orientable de genus 1 (Consecuencia 3). Entonces, a partir de (4), tenemos:

$$6 > 6 - \frac{6}{\alpha_0} \geq \chi - 1 \quad (8)$$

Ahora, como χ representa cualquier número entero, tenemos:

$$\chi \leq 6 = \frac{7+5}{2} = \frac{7+\sqrt{49-24E}}{2} \quad (9)$$

■

Escolio 13.- Es aquí donde surge la primera consecuencia de todo este estudio., ya que:

Hipótesis 3) $E = 2$

Esta condición establece el Problema de los Cuatro Colores.

Escolio 14.- La segunda consecuencia es la propuesta de Ringel de una solución general para el Problema del Coloreo de Mapas. Sean $k, r, s \in \mathbb{Z}$. Dada la igualdad $n = 12s$, es posible elegir r, k tal que $s = 2^{k-2}(2r + 1)$. Entonces 2^{k-2} representa la mayor potencia de 2 que puede dividir a s . Además, se debe considerar a las estructuras aditivas y multiplicativas de campos finitos, con las siguientes propiedades [6] [7], citados en [4] (p.174), y también revisados para este artículo:

- 1) $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \exists GF(2^k)$ de orden 2^k , denominado Campo de Galois de orden 2^k .
- 2) Existe el grupo multiplicativo $F^*(2^k)$, y que tiene la propiedad de ser cíclico de orden $2^k - 1$.
- 3) $\mathcal{G}$ representa un generador de $F^*(2^k) \rightarrow 1, \mathcal{G}, \mathcal{G}^2, \dots, \mathcal{G}^{k-1}$ representa (la serie) la base para $GF(2^k)$ sobre $GF(2)$.
- 4) $p \in F^+(2^k) \rightarrow p + p = 0$.

Nota 1.-: El grupo aditivo en $GF(2^k)$ se designa, por convenio, como $F^+(2^k)$, y su elemento de identidad es 0. Por lo tanto, todos los elementos diferentes de 0 forman un grupo bajo la multiplicación, es decir el grupo multiplicativo $F^*(2^k)$.

Consecuencia 4.- Sea $\mathcal{G}$ cualquier generador de $F^*(2^k)$ y por Escolio (6), con base en la notación exponencial para un automorfismo, se define un automorfismo α de $F^+(2^k)$, debido a una extensión lineal del mapeo siguiente de las bases (por Propiedad (3), Escolio 14):

$$\mathcal{G}^{i\alpha} = \mathcal{G}^i \text{ tal que } i = \{1, 2, 3, \dots, k-1\} \quad (10)$$

$$\mathcal{G}^\alpha = 1 + \mathcal{G} \quad (11)$$

$$1^\alpha = \mathcal{G} \quad (12)$$

Nota 2.-: Para aclarar que la expresión α^3 representa una identidad de automorfismo $\mathcal{A}$ y que los elementos representados en la igualdad $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 = \mathcal{A}$ forman un grupo cíclico A de orden 3, debemos tener presente lo siguiente:

$$1^{\alpha^3} = \mathcal{A}^{\alpha^2} = (1 + \mathcal{A})^\alpha = 1^\alpha + \mathcal{A}^\alpha = \mathcal{A} + 1 + \mathcal{A} = 1 \quad (13)$$

$$\mathcal{A}^{\alpha^3} = (1 + \mathcal{A})^{\alpha^2} = (\mathcal{A} + 1 + \mathcal{A})^\alpha = 1^\alpha = \mathcal{A} \quad (14)$$

Además, la expresión:

$$[p, a] \cdot [q, b] = [p + q^\alpha, ab]. \quad (15)$$

Representa a un Grupo multiplicativo, que define al grupo $G(k)$ de orden $3 \cdot 2^k$ y con elementos $[p, a]$, tal que $p \in F^+(2^k) \wedge a \in A$. [4] [6] [7].

Consecuencia 5.- La expresión $[0, e] = \varepsilon$ representa una identidad para $G(k)$, pues se identifica como un

producto semidirecto $G(k) = F^*(2^k) * A$ con ambas expresiones en el lado derecho de la igualdad representando grupos (por Propiedades 1, 2, 3; Escolio 14); además, existe la operación inversa, con base en las propiedades de campo de los números Reales $\mathbb{R}$:

$$[p, a]^{-1} = [p^{a^{-1}}, a^{-1}] \quad (16)$$

Con base en lo anterior, la expresión (15) es asociativa.

Consecuencia 6.- Con base en todo lo anterior, queda propuesto el siguiente grupo [4]:

$$A_4 \times (Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2)(k-2) \text{ veces} \times Z_{2r+1} \quad (17)$$

Nota 3.-: Para 1974, no existía todavía una representación gráfica para este objeto matemático, cuyo número de elementos está definido por la expresión:

$$12 \cdot 2^{k-2} \cdot (2r + 1) = 12s \quad [4]. \quad (18)$$

Escolio 15.- Ringel propone y demuestra los siguientes lemas, a manera de una brillante conclusión a su trabajo de investigación, en colaboración con Ted Youngs.

Lema 1.- $[p, a]$ es de orden 2 $\leftrightarrow p \neq 0 \wedge a = e$

Prueba: $[p, a]$ es de orden 2 $\rightarrow [p + p^\alpha, a^2] = [0, e]$ (Por Propiedad 3, Escolio 14) (Expresión 15) (Consecuencia 5). El consecuente es la igualdad $a = e$, debido a que A es cíclico de orden 3 (Por Nota 2, Expresiones 13 y 14 y Escolio 6). Además, $p = 0 \rightarrow [p, a]$ es una identidad, pero no un orden 2. Consecuentemente $p = 0 \wedge a = e$ (Por Nota 2, Expresiones 13 y 14). Finalmente, la expresión posee una expresión inversa (Por Propiedad 4, Escolio 14). ■

Lema 2.- $[0, \alpha] \wedge [\mathcal{G}, \alpha]$ son de orden 3.

Prueba: $[0, \alpha]^3 = [0, \alpha^3] = [0, e]$ (Por Nota 1, Expresión 14 y Consecuencia 5).

Además $[\mathcal{G}, \alpha]^3 = [\mathcal{G} + \mathcal{G}^\alpha, \alpha^2][\mathcal{G}, \alpha] = [\mathcal{G} + 1 + \mathcal{G}, \alpha^2][\mathcal{G}, \alpha] = [1 + \alpha^2][\mathcal{G}, \alpha] = [1 + \mathcal{G}^{2\alpha}, \alpha^3] = [0, e]$ (Por Consecuencia 4, Expresiones 10, 11 y 12); (Por Nota 2, Expresiones 13 y 14); (Por Consecuencia 5). Además, al considerar la igualdad: $b = 2^k$ [4], con las condiciones:

- a) $s_i = [\mathcal{G}^i + \mathcal{G}^{i+1}, e]$, con $i = (1, 2, \dots, b-1)$;
- b) $t_i = [\mathcal{G}^i, \alpha]$, con $i = (1, 2, \dots, b-1)$;
- c) $t_b = [0, \alpha]$.

Se deduce que $t_1 \wedge t_b$ ambos son de orden 3 y cada s_i posee orden 2, (Por Escolio 14 Propiedad 3 y por Lema 1). ■

Lema 3.- Dado el conjunto s_i tal que $(1, 2, \dots, b-1 = i)$, se establece la condición de que todos ellos son distintos.

Prueba: Si se establece la relación de desigualdad entre estos elementos, tenemos: $b-1 \geq i > j \geq 1$, además de la igualdad $s_i = s_j$, podría deducirse que $\mathcal{G}^i = \mathcal{G}^j$. Sin embargo, esta afirmación no es verdadera, puesto que $\mathcal{G}$ establece o genera al grupo F^*2^k (Por Nota 1, Expresiones

10, 11 y 12. Entonces es necesario reconsiderar el enunciado del Lema 3:

a) s_i , tal que $(1, 2, \dots, b-1) = i$,

b) t_i , tal que $(i = 1, 2, \dots, b)$

Además, al considerar la Expresión 16, se genera la siguiente consecuencia: t_i^{-1} con $\alpha^{-1} \neq \alpha$, se puede escribir:

c) t_i^{-1} tal que $(i = 1, 2, \dots, b)$

Se deduce que son realmente diferentes estos tres elementos ya que consisten de $3b - 1$ elementos y ninguno de ellos es igual a $[0, e] = \varepsilon$ (por Consecuencia 5) y (por propiedad 3 del Escolio 14). Entonces las expresiones a), b), c) que forman una colección, agotan los elementos no idénticos del grupo $G(k)$, (por la última afirmación de la Nota 2). ■

V. CONCLUSIONES

El análisis de los objetos matemáticos denominados Orientación y No Orientación escogidos dentro de los muchos otros publicados en esta magnífica obra, me ha permitido resaltar la tercera condición necesaria para la propuesta denominada El Problema de los Cuatro Colores, justamente cuando se aborda la tercera condición: $E = 2$ (Teorema 5, Hipótesis 3) y que ha sido estudiado por los investigadores dedicados a la propuesta de su solución. Es muy importante reconocer el trabajo de Ted Youngs y de Gerhard Ringel pues además de haber continuado con el trabajo de investigadores anteriores en la solución de la Conjetura de Heawood y su consecuencia inmediata, El Teorema del Coloreo de Mapas, contribuyeron con la propuesta de Casos Orientables y No Orientables que funcionan como una guía axiomática en el estudio del vínculo entre la Teoría Cromática de Grafos, las Rotaciones de Grafos, la clasificación de Superficies Cerradas y la Incrustación de Grafos y relacionados también con la Teoría de la Enumeración. La investigación para la solución del Problema de los Cuatro Colores sigue vigente, y estoy convencido de que su estudio seguirá generando objetos matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco personalmente al director de la biblioteca Vasconcelos, el Dr. José Mariano Leyva Pérez Gay; así como al encargado de actividades culturales Jorge Antonio Hernández Reyna, a la encargada de la coordinación de programación del evento Alin Escoto Torres y a todo su equipo por la gentil y atenta apertura que tuvieron cuando los editores les presentamos la idea general para la organización del Primer Congreso Internacional de Objetos y Objetivos en Matemáticas y el Primer Simposio Internacional sobre el Problema de los Cuatro Colores, algún día del mes de diciembre de 2022. Por su dedicación con un alto distintivo profesional en las diversas reuniones durante 2023 y hasta febrero de 2024, por su alto compromiso y apoyo durante el evento académico durante el 14 y 15 de marzo de 2024; sin cuya colaboración no hubiese sido posible dicho evento académico y por consecuencia la publicación de los trabajos de investigación presentados en el mismo. Las bellas instalaciones de la Biblioteca Vasconcelos y únicas en su clase

ofrecieron un escenario único y distintivo que engalanaron la participación de investigadores y público asistente.

REFERENCIAS

- [1] Y. B. Rudyak, A. V. Chernavskii, *Orientation*, Encyclopedia of Mathematics. An updated and annotated translation of the Soviet Mathematical Encyclopedia Volume 7, M. Hazewinkel editor, p.p. 16–18, 1991.
- [2] V. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, *Modern Geometry Vol. 1*, Springer-Verlag, 1984.
- [3] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw Hill, 1966.
- [4] G. Ringel, *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, 1974.
- [5] K. Borsuk, W. Szmielew, *Foundations of Geometry*, Euclidean, Bolyai-Lobachevskian Geometry, Projective Geometry. North-Holland Publishing Company, p.p. 80–83, 1960.
- [6] B. L. Waerden, *Modern Algebra Volume 1*, Ungar, p.p. 115-118, 1953.
- [7] S. Lang, *Algebra*, Adison – Wesley, p.p. 182-185, 1971.

Teorema de los cuatro colores aplicado en el pequeño rombicosidodecaedro.

Jaime William Flores Tecalco*^

*Escuela Secundaria No.224 Huetzalin, C. Pino S/N, Guadalupe, Xochimilco, 16860 Ciudad de México, CDMX. ^Estudiante de Maestría, Universidad del Valle de México (UVM), Sadi Carnot 57, San Rafael, Cuauhtémoc, 06470 Ciudad de México, CDMX

jaimewft@gmail.com <https://orcid.org/0009-0007-5597-7301>

Resumen- En este artículo se da a conocer un principio de aplicación del teorema de los cuatro colores en el pequeño rombicosidodecaedro; también se expone el desarrollo y la construcción del grafo de dicho sólido para una mejor interpretación del teorema.

Palabras clave- Rombicosidodecaedro, cuatro colores, teorema, grafos, vértices, clases, aristas.

Abstract- This article presents a principle of application of the four-color theorem in the small rhombicosidodecahedron; the development and construction of the graph of said solid are also presented for a better interpretation of the theorem.

Keywords- Rhombicosidodecahedron, four colors, theorem, graphs, vertices, classes, edges.

Mathematical Subject Classification: 05-06, 11Axx

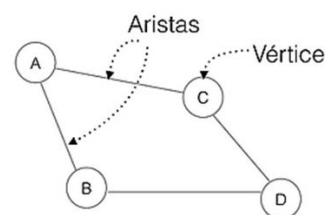


Fig.1. Vértices y aristas

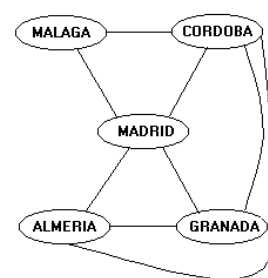


Fig.2. Conexión en un grafo.

I. PROPOSICIÓN DE LOS CUATRO COLORES

El Problema de los cuatro colores puede formularse de varias maneras diferentes. Por ejemplo, se puede utilizar la siguiente concepción para comenzar:

“Dado cualquier mapa con cualquier número de regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes o menos, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color. Las regiones adyacentes comparten no solo un punto, sino todo un segmento de borde (frontera) en común” [9].

Este teorema fue propuesto por primera vez en 1852 por Francis Guthrie y finalmente demostrado en 1976 por Kenneth Appel y Wolfgang Haken con la ayuda de una computadora, lo que fue un hito significativo ya que fue una de las primeras demostraciones asistidas por computadora. Esto añadió una capa de complejidad y controversia porque, aunque la demostración se consideró correcta, no todos los pasos pudieron ser verificados manualmente debido a su extensión y complejidad [10].

II. TEORÍA DE GRAFOS

Los grafos son conjuntos de “puntos” llamados vértices o nodos que están unidos por “líneas” denominadas aristas o arcos, con los cuales es posible relacionar objetos de una forma específica. Casi cualquier problema o relación entre objetos puede ser modelado como un grafo [4] como se describe en la figura 1 y 2.

La distinción entre un grafo y un mapa es que un grafo sólo muestra qué regiones son vecinas; no muestra el tamaño o la forma de las regiones, ubicaciones relativas u otra información que no necesitamos.

La mayoría de los mapas se pueden interpretar mediante un grafo de la siguiente manera:

- Para cada región del mapa, en el grafo se dibuja un pequeño círculo (vértice o nodo) y se coloca una etiqueta dentro de él.

- Para cada par de regiones en el mapa que comparten un borde, en el grafo se conectan estos círculos correspondientes con una línea recta o curva (aristas) [6] como se describe en la figura 3.

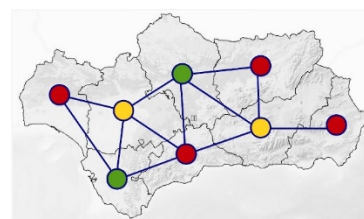


Fig. 3. Grafo de un mapa.

III. TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES EN FUNCIÓN DE LA TEORÍA DE GRAFOS

Si las caras de un grafo G están coloreadas con cuatro colores W, X, Y, Z y como cada arista está en el límite de dos caras vecinas, entonces hay asociado con ella un par de colores, supóngase, W y X [8].

La pareja

$$(W, X) = (X, W) \quad (1)$$

se le denomina carácter de la arista E .

Por lo tanto, todas las aristas de G se dividen en seis categorías acorde a sus características.

A cada carácter le corresponde un carácter opuesto que contiene los dos colores restantes, es decir, la arista E_1 y la arista E_2 están en la misma clase cuando tienen caracteres iguales u opuestos [8].

De esta manera, todas las aristas de G se dividen en tres clases, que consisten respectivamente, en las aristas cuyo carácter pertenece a uno de los tres tipos:

$$(W, X), (Y, Z) \quad (2)$$

$$(W, Y), (X, Z) \quad (3)$$

$$(W, Z), (X, Y) \quad (4)$$

En consecuencia, se tiene una descomposición disjunta de aristas de G en tres subgrafos:

$$G = H_1 + H_2 + H_3 \quad (5)$$

Es conveniente utilizar la representación modular de los colores en un módulo con dos generadores y coeficientes $mod 2$.

$$W = 0,0 \quad (6)$$

$$X = 0,1 \quad (7)$$

$$Y = 1,0 \quad (8)$$

$$Z = 1,1 \quad (9)$$

La función arista $G(E)$ asigna a cada arista E la suma de los valores de color de las caras adyacentes. Es decir, las tres clases se caracterizan por los tres valores de arista:

$$W + X = Y + Z = 0,1 \quad (10)$$

$$W + Y = X + Z = 1,0 \quad (11)$$

$$W + Z = X + Y = 1,1 \quad (12)$$

Por lo tanto, cuando el color de la cara de un lado de la arista se suma al valor de la arista, se obtiene el valor de color de la otra cara vecina.

Del criterio de regularidad de la función de color [8] se deduce que la suma de los valores de las aristas en cualquier vértice debe anularse, es sencillo de verificarlo directamente. En un vértice v , el número de aristas se descompone en tres sumandos:

$$p(v) = p_1(v) + p_2(v) + p_3(v) \quad (13)$$

Correspondiente a la anterior descomposición. Como la suma de los valores en v será 0,0 se obtienen las siguientes congruencias:

$$p_1(v) + p_3(v) \equiv p_2(v) + p_3(v) \equiv 0(mod 2) \quad (14)$$

$$p_1(v) \equiv p_2(v) \equiv p_3(v)(mod 2) \quad (15)$$

Cuando se cumple la condición anterior (15), la suma de los valores de las aristas en v se anula y se define una función de color para las caras.

Por tanto, una condición necesaria y suficiente para que el grafo G sea coloreable con cuatro colores es que G tenga una descomposición en subgrafos disjuntos en las aristas $G = H_1 + H_2 + H_3$ de modo que en cualquier vértice v el número de aristas de los tres subgrafos sea par o impar [8].

IV. PEQUEÑO ROMBICOSIDODECAEDRO EN LA TEORÍA DE GRAFOS

El pequeño Rombicosidodecaedro (Figura 4) es un sólido Arquimediano el cual posee 62 caras, estas caras son 20 triángulos equiláteros, 30 cuadrados y 12 pentágonos regulares, 60 vértices y 120 aristas [5].

Los sólidos Arquimedianos o sólidos de Arquímedes son un grupo de 13 poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. Todos los sólidos Arquimedianos son de vértices uniformes. La mayoría de ellos se obtienen por truncamiento de los sólidos platónicos [3].

Los sólidos platónicos o regulares son poliedros convexos tal que todas sus caras son polígonos regulares iguales entre sí, y en que todos los ángulos sólidos son iguales [2].

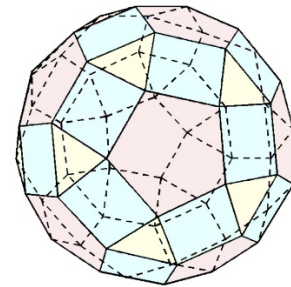


Fig. 4. Pequeño rombicosidodecaedro.

El término grafo plano se refiere a un grafo donde es posible dibujarlo sin que las aristas se crucen. Se define la abreviatura PG para un grafo plano [6].

Si se observa un cruce en un grafo, se debe determinar si se puede evitar o no el cruce para saber si es un PG o no.

El grado de un vértice es igual al número de líneas que se conectan al vértice. Por ejemplo, un vértice de grado 3 tiene tres líneas que lo conectan [6] como se describe en la figura 5.

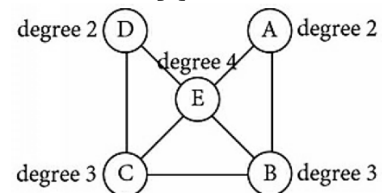


Fig. 5. Grados de vértices en un grafo.

El número de vértices, aristas y caras de un mapa en un grafo plano PG o de un poliedro están relacionados por La fórmula de Euler, siempre que consideremos el área circundante ilimitada como una de las caras [1].

$$V - A + C = 2 \quad (16)$$

De donde V el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras.

Para cualquier poliedro homeomorfo a una esfera se tiene que la característica de Euler es 2 [1].

El pequeño Rombicosidodecaedro cumple con el Teorema de Euler sobre Poliedros

$$\begin{aligned} V - A + C &= 2 \\ 60 - 120 + 62 &= 2 \\ 122 - 120 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned} \quad (17)$$

La proyección estereográfica es un tipo de proyección para establecer la relación angular existente entre las caras o estructuras geométricas, es decir, es una técnica en la geometría y cartografía que se utiliza para proyectar una esfera sobre un plano [7].

Todas las proyecciones permiten la representación de objetos tridimensionales en una superficie de dos dimensiones. $R^3 \rightarrow R^2$

Cualquiera que sea el sistema de proyección elegido, la representación plana presenta deformaciones que pueden ser lineales, angulares y superficiales.

Esta proyección es conforme, preservando ángulos, pero no áreas o longitudes. Las líneas rectas sobre la esfera se proyectan como arcos circulares sobre el plano [7].

Un diagrama de Schlegel es una proyección de un polítopo contenido en R^n sobre el espacio R^{n-1} a través de un punto que está más allá de una de sus "caras". En R^3 un diagrama de Schlegel es una proyección de un poliedro sobre el plano dando una figura plana R^2 [2]; como se describe en la figura 6.

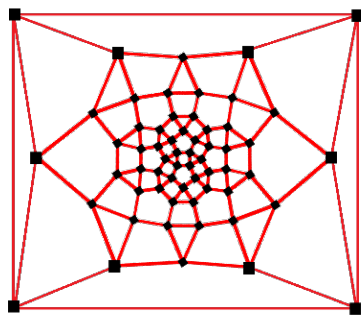


Fig. 6.- Diagrama de Schlegel de un pequeño rombicosidodecaedro.

Al desenvolver el pequeño rombicosidodecaedro en R^3 a una plantilla plana en R^2 se conservan las características del tamaño de las caras, sus formas y cantidades como en R^3 .

La plantilla plana en R^2 toma la forma de un mapa como se describe en la figura 7 y 8.

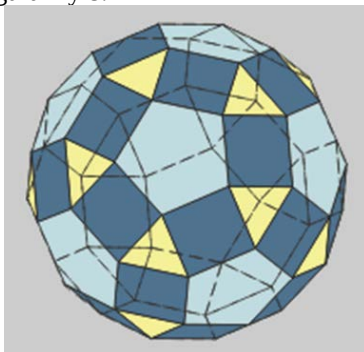


Fig. 7. Modelado de caras del pequeño rombicosidodecaedro.

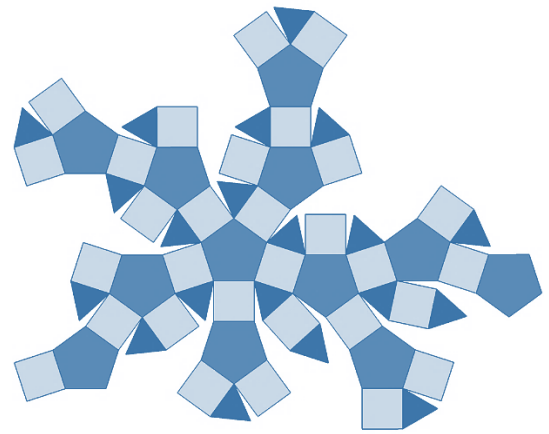


Fig. 8. Desenvoltura del pequeño rombicosidodecaedro.

V. CONSTRUCCIÓN DEL GRAFO

A través, de una visión de la Fig. 6, en una plantilla plana en R^2 (Fig. 8) se enumeran las 62 caras [5] del pequeño rombicosidodecaedro; como se describe en la figura 9

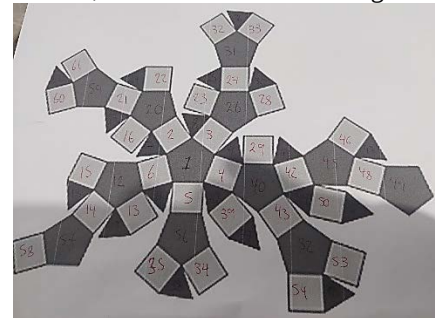


Fig. 9. Caras enumeradas sin una secuencia definida.

La plantilla plana en R^2 enumerada se comienza a diseñar de manera de grafo cumpliendo sus características; como se describe en la figura 10.

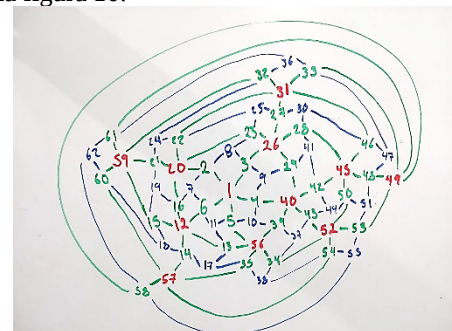


Fig. 10. Grafo enumerado del pequeño rombicosidodecaedro.

Se desarrolló por medio de Software el grafo del pequeño rombicosidodecaedro siguiendo el grafo preliminar (Fig. 11).

Se observan que no se han perdido las conexiones de los vértices, solo se intercambiaron por vértices de tres colores diferentes.

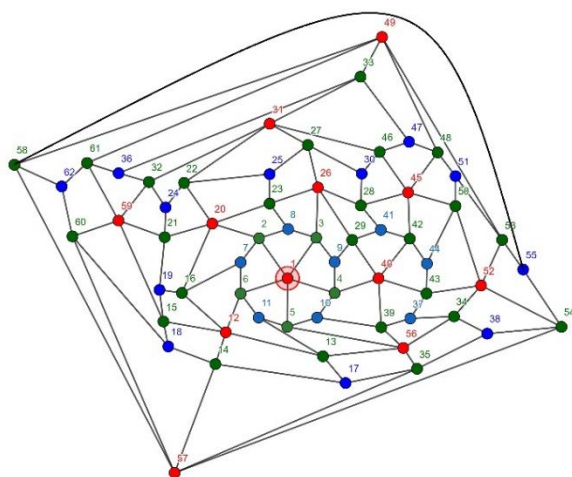


Fig. 11. Grafo del pequeño rombicosidodecaedro.

El grafo del pequeño rombicosidodecaedro (Fig. 12) tiene 62 vértices coloreados:

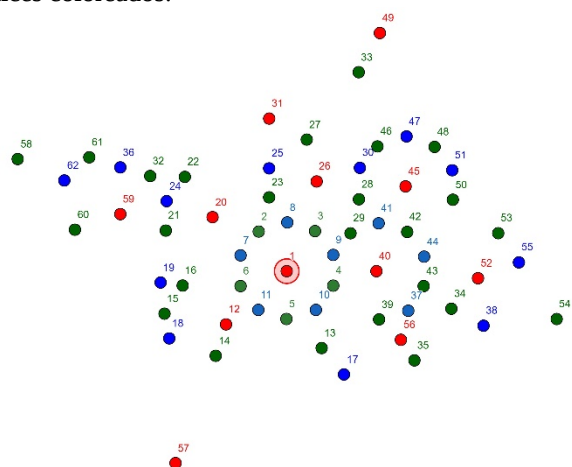


Fig. 12. Vértices del grafo del pequeño rombicosidodecaedro.

El grafo del pequeño rombicosidodecaedro (Fig. 13) tiene 120 aristas:

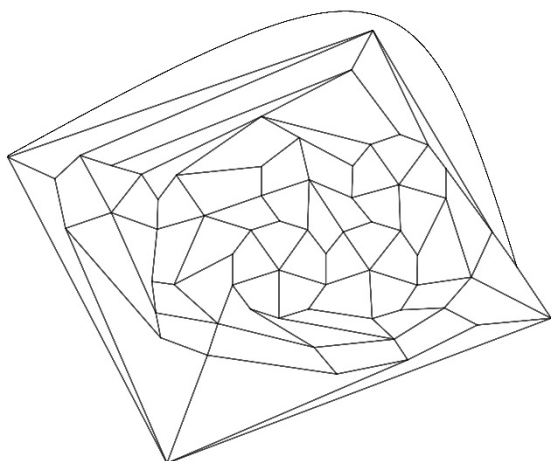


Fig. 13. Aristas del grafo del pequeño rombicosidodecaedro.

El grafo del pequeño rombicosidodecaedro (Fig. 14) tiene 60 regiones, contando la exterior:

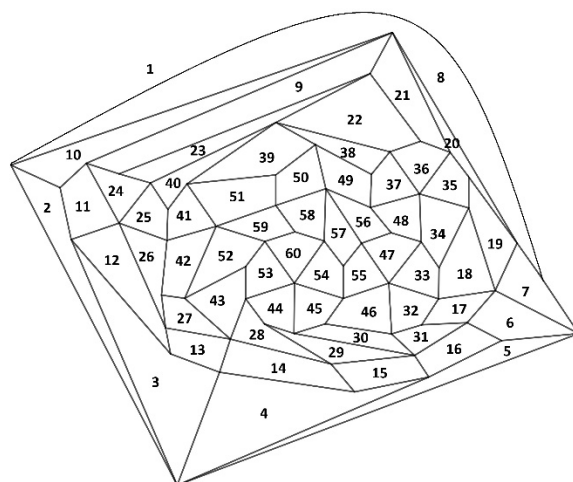


Fig. 14. Regiones del grafo del pequeño rombicosidodecaedro .

El grafo del pequeño Rombicosidodecaedro cumple con el Teorema de Euler sobre la característica que debe cumplir para considerarse un Grafo Plano PG [1], además de que ninguna arista se cruza.

$$\begin{aligned} V - A + C &= 2 \\ 60 - 120 + 62 &= 2 \\ 122 - 120 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned} \quad (18)$$

VI. TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES EN EL PEQUEÑO ROMBICOSIDODECAEDRO

En el Teorema de los cuatro colores en teoría de grafos, si PG es un grafo plano, entonces $\chi(G) \leq 4$. Donde el menor número de colores necesarios para colorear un PG se llama número cromático y se denota como $\chi(G)$ [9].

En el grafo del pequeño rombicosidodecaedro (Fig. 11) se presentan tres tipos de grados de vértices: los vértices rojos son de grado 5, los vértices verdes son de grado 4 y los vértices azules son de grado 3 (Fig. 15).

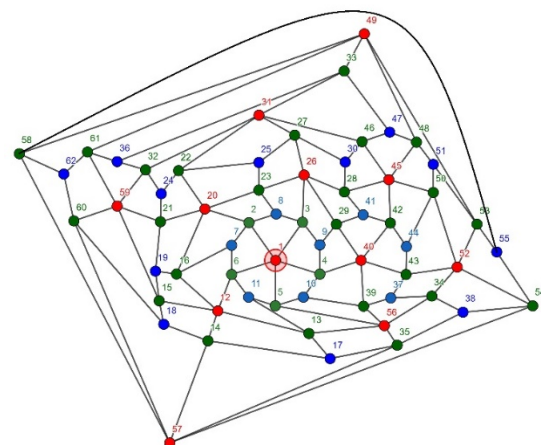


Fig. 15. Tres tipos de grados de vértices.

Los vértices tipo rojo siempre se conectan con 5 vértices de tipo verde. Los vértices de tipo verde siempre se conectan con 2 vértices de tipo rojo y 2 de tipo azul. Los vértices de tipo azul siempre se conectan con 3 vértices de tipo verde (Fig. 16).

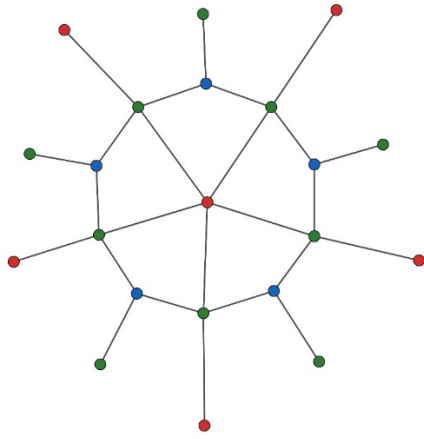


Fig. 16. Conexión entre vértices del grafo del pequeño rombicosidodecaedro.

El grafo del pequeño Rombicosidodecaedro y el comportamiento de los vértices indica que con 3 colores podemos colorear el grafo respetando las condiciones planteadas. Únicamente debemos alternar los colores dependiendo el tipo de vértice (Fig. 17).

Por tanto, se cumple el Teorema de los 4 colores:

$$\chi(G) \leq 4 \quad (19)$$

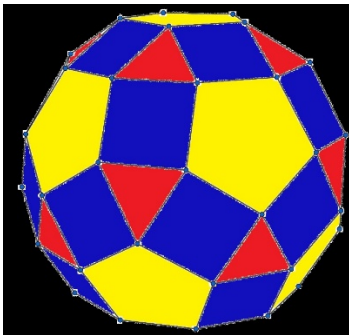


Fig. 17. Pequeño rombicosidodecaedro coloreado con tres colores.

El grafo del pequeño Rombicosidodecaedro y el comportamiento de los vértices indica que con 2 colores podemos reducir el coloreado del grafo respetando las condiciones planteadas.

Únicamente debemos convertir los vértices de tipo azul en tipo rojo y tenemos el mínimo de colores posibles (Fig. 18 y 19).

Por tanto, se cumple el Teorema de los 4 colores:

$$\chi(G) \leq 4 \quad (20)$$

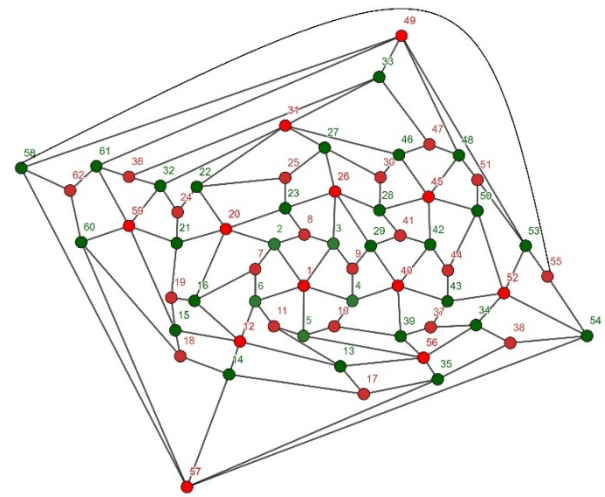


Fig. 18. Grafo con dos colores de vértice.

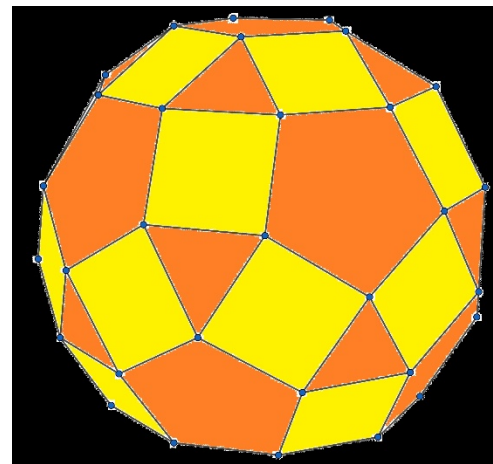


Fig. 19. Pequeño rombicosidodecaedro coloreado con dos colores.

VII. CONCLUSIÓN

Los mapas siempre han fascinado a los topólogos en virtud de ciertas cualidades que poseen. Al colorear un mapa geográfico, se acostumbra a asignar diferentes colores a dos regiones que tienen una porción de frontera que le es común. Se han situado los colores empíricamente en los mapas independientemente del número de regiones que contengan y cómo éstas estén situadas.

El pequeño rombicosidodecaedro es una muestra que cualquier tipo de sólido o cuerpo semejante se puede modelar como un PG al cual se le puede aplicar el teorema de los cuatro colores cuyos vértices pueden colorearse usando no más de cuatro colores diferentes mientras se cumplan las condiciones de que no existan dos vértices conectados, por una arista recta o curva, que tengan el mismo color; que cada vértice está coloreado. Un solo vértice sólo se puede colorear usando un solo color, no se permite un vértice multicolor. Que el número de vértices sea finito. El grafo no es un diseño infinitamente repetido como un teselado o un fractal. Que el grafo no está dirigido (las aristas no tienen flechas). El grafo no esté desconectado y que ninguna arista conecte un vértice consigo mismo (esto se llama bucle).

REFERENCIAS

- [1] D. W. Barnette, *Map Coloring, Polyhedra, and the Four-Color Problem*, Mathematical Association of America, USA, 1983.
- [2] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes* (3rd ed.), Dover Publications, USA, 1973.
- [3] P. R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, UK, 1997.
- [4] R. Diestel, *Graph Theory*, 5th edition, Springer, USA, 2017.
- [5] J. Flores, *Descripción algebraica del área y volumen del pequeño Rombicosidodecaedro*, Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos No. 6, México, 2022.
- [6] C. Mc Mullen, *The Four-Color Theorem and Basic Graph Theory*, CreateSpace Independent Publishing Platform, USA, 2020.
- [7] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, UK, 1997.
- [8] O. Ore, *The Four-Color Problem*, Academic Press, USA, 1997.
- [9] G. Ringel, *Map Color Theorem*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 1974.
- [10] R. Wilson, *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved*, Princeton University Press, USA, 2014.

Modelado Matemático de un algoritmo para comportamiento de enjambres robóticos basados en las restricciones del teorema de los cuatro-colores.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-Hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

fajardoensm@gmail.com <https://orcid.org/0000-0003-1438-3519>

Resumen- El presente artículo se modela matemáticamente el posible comportamiento que pueden tomar enjambres robóticos formados por robots que adopten cuatro posibles roles indicados como un color utilizando las restricciones del teorema de los cuatro colores mediante un algoritmo de posicionamiento y control que describe el proceso de coloreado como un grafo plano.

Palabras Clave- combinatoria, modelado matemático, teorema de los cuatro-colores, inteligencia embebida, enjambres robot.

Abstract- This paper mathematically models the possible behavior of robotic swarms formed by robots adopting four possible roles indicated as a color using the constraints of the four-color theorem through a control algorithm for the coloring process where the swarm is a planar graph.

Keywords- combinatorics, mathematical modeling, four-color theorem, embedded intelligence, swarm robotics.

Mathematical Subject Classification: 05-06, 68R05, 68T40.

I. INTRODUCCIÓN A LOS ENJAMBRES ROBOT

La robótica grupal es la tecnología que describe la cooperación entre varios robots [1]; por lo que tiene un enfoque sistémico semejante a varios tipos de insectos sociales que presentan una inteligencia como enjambre, tolerancia a fallos, autoorganización y autorregulación.

Las aplicaciones de los enjambres robóticos van desde labores cotidianas como limpieza de superficies como pisos, piscinas, manejo de residuos peligrosos, poda, operaciones militares de drones, búsqueda de minas, inspección en zonas colapsadas por sismos, mapeo, extracción de minerales, cosechado, transporte colectivo de objetos, vigilancia hasta cirugías nanotecnológicas de precisión no invasiva [2].

La locomoción de los robots de enjambre puede ser de cualquier tipo, desde hexápodos que emulan insectos, ápodos, androides, con ruedas; incluso vehículos aéreos no tripulados / unmanned aerial vehicle (UAV) utilizando comunicación inalámbrica entre ellos.

La comunicación de los robots de enjambre permite informar las coordenadas de cada uno de los individuos contiguos en cadena hasta que todos los elementos del conjunto tienen la información; lo anterior permite el cambio de comportamiento emergente en trayectorias o decisiones de forma grupal en tiempo real [3].

La robótica de enjambre es adecuada entonces para solucionar problemas como la adaptación a cambios del medio ambiente, realizar simulaciones en combinaciones para solución de tareas, arquitecturas grupales, distribución de trabajos en subgrupos robóticos, planificación de tareas colectivas y manejo de herramientas cooperativas.

La inteligencia de enjambre genera restricciones en la conducta de cada individuo del grupo para formar un comportamiento organizado grupal que interactúe con su ambiente mediante la resolución de micro tareas a nivel individuo que permitan lograr en conjunto macro tareas de beneficio común; tal y como se propone en el comunismo, pero sin la entropía del sistema como se ha observado históricamente generada por los individuos humanos y que los insectos robots si tienen la capacidad de lograr al no tener un pensamiento individualista.

La inteligencia artificial embebida en robótica de enjambres (swarm robotics) se basa en el establecimiento de escenarios posibles y la programación de las posibles restricciones de comportamiento grupal predecible para generar el conjunto de interacciones entre los individuos con el enjambre y su medio ambiente [1].

El comportamiento en enjambre coordina y restringe el comportamiento individual respecto a las necesidades dinámicas del sistema mediante una red de comunicación entre los robots del enjambre [4]; pudiendo cambiar la tarea de un individuo o subgrupo, por lo que la retroalimentación (feedback) debe ser continua, logrando un control de lazo cerrado mediante inteligencia grupal orientada al cumplimiento de un objetivo común [3].

Por lo anterior es importante conocer la ubicación en tiempo real de cada individuo para tener un mapa de los individuos contiguos; por lo que el uso de la teoría de grafos para representar el problema es adecuado.

Un enjambre robot trabaja mediante subgrupos especializados en tareas que interactúan con otros, por lo que un robot puede tomar distintos roles durante una jornada por necesidad, cambios del ambiente o si alguno de ellos deja de operar entre otras situaciones[1]; así mismo esta arquitectura es modular y escalable permitiendo hacer permutaciones, combinaciones, agregación, eliminación e intercambio de individuos del enjambre, lo que lo convierte en un sistema que

tiende a la autorregulación en dónde el tiempo de resolución de tareas es directamente proporcional al número de robots del enjambre mientras cuenten con las condiciones de operabilidad mínimas[3].

Dentro de las técnicas de organización para enjambres robot se encuentran la centralizada, en donde un cerebro madre se dedica a asignar tareas a cada individuo para lograr el comportamiento grupal deseado, el descentralizado donde un líder realiza funciones autónomamente de la estación madre y el mixto que utiliza las ventajas de las centralizadas y descentralizadas mediante el uso de un líder de enjambre o subgrupo con derechos de administrador heredados de la estación madre que forma parcialmente un nuevo enjambre (enjambrazón) [6].

II. EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES

El abogado Francis Guthrie propuso el problema de los cuatro colores en 1852 [7] solicitándole a su hermano Frederick Guthrie que era alumno de matemáticas del famoso De Morgan para que se los mostrara; al no poder brindar una razón a su alumno, éste le escribió a Hamilton lo siguiente:

Uno de mis estudiantes me pidió hoy que le diera una razón para un hecho que no sabía que era un hecho -y todavía no lo sé-. Dice que si una figura se divide de alguna manera y los compartimentos se colorean de manera diferente de modo que las figuras con cualquier porción de línea límite común tengan colores diferentes, se pueden necesitar cuatro colores, pero no más; el siguiente es el caso en el que se necesitan cuatro colores. La pregunta no puede inventarse como una necesidad de cinco o más... [8].

Al día siguiente Hamilton le respondió: “No creo que pueda resolver tu cuaternión de color muy pronto” [8], por lo que De Morgan siguió buscando quién lo resolviera como Charles Peirce y Cayley el cuál lo planteó a la Sociedad Matemática de Londres y envió a la Royal Geographical Society un artículo describiendo las dificultades al intentar demostrar la conjetura sobre la coloreado de mapas, siendo publicado por primera ocasión en 1879 [8].

El teorema de los cuatro colores establece que un mapa es toda separación de un plano en regiones contiguas; éstas pueden colorearse usando como máximo cuatro colores, tal que no existan dos regiones adyacentes con del mismo color [9].

Dos regiones son adyacentes si y sólo si comparten un segmento de arista y no solo un punto; así mismo los vértices de cada grafo plano pueden colorearse con como máximo cuatro colores de modo que no existan dos vértices adyacentes con el mismo color por lo que “todo grafo plano es tetrapintable” [9][10][11].

Mediante la teoría de grafos las regiones de un mapa pueden ser remplazadas por vértices y conectando dos vértices por una arista cuando ambas compartan un segmento de arista y no solo una esquina [10].

Durante muchos años se intentó dar solución en donde se aceptaron y rechazaron pruebas conforme eran refutadas hasta que finalmente en 1976 [12] la conjetura se convirtió en teorema de los cuatro-colores o four-color theorem (4CT) gracias al trabajo por computadora de Appel y Haken [13] al programar un algoritmo basado en la reducibilidad utilizando

cadena de Kempe limitado a un anillo ≤ 14 mediante un conjunto cercano a 1500 configuraciones [11][14].

El Teorema de los Cuatro Colores es el primer teorema importante demostrado mediante una computadora [13] no verificable directamente por otros matemáticos lo que ocasionó una división de posturas [8][13].

En 1977 fue publicado el trabajo del algoritmo en Scientific American bajo el título: “The solution of the four-color-map problem” [9].

III. DESCRIPCIÓN DEL ENJAMBRE ROBOT BASADO EN LAS RESTRICCIONES 4CT

Como se ha descrito anteriormente un enjambre de robots puede ser modelado como un grafo con una estructura y comportamiento semejante al coloreado de grafos planos, donde cada vértice o nodo represente un robot del enjambre; así mismo cada color del nodo o sección en un grafo puede representar el tipo de robot, su comportamiento, su modalidad de trabajo, su posición u otras acciones particulares deseadas en el diseño que repercuten el enjambre.

Las condiciones o restricciones de cada robot encargado de alguna función o regla de separación entre sus vecinos para la no saturación de funciones por zona pueden modelarse mediante restricciones. Por lo anterior se requiere la construcción de un algoritmo para el coloreo de grafos en donde cada nodo represente la posición de un robot del enjambre pudiendo ser esquematizado como un grafo plano.

Como se describió anteriormente los miembros que conforman el enjambre robot pueden adoptar distintos roles para una misión, algunos de estos roles no deben repetirse en el enjambre para que exista la suficiente variedad de cada uno de ellos para cumplir un objetivo.

Supongamos el caso particular de un enjambre de robótica agrícola en donde un escuadrón tiene la misión de cosecha de zanahorias, donde pequeños robots genéricos configurables toman las modalidades de: recolectado y desinfección, excavadora, extracción del cultivo y cortado de raíces.

Así mismo se asume la existencia de un quinto robot de otro tipo con rol fijo encargado del almacenamiento de las zanahorias recolectadas y transportarlas cuando superen cierto peso para su empaclado siendo relevado por otro del mismo tipo antes de retirarse a descargar, siendo un ciclo continuo entre ellos.

El robot es una rampa para poder empujar los cultivos que cuenta con tracción en las 4 ruedas de tipo tractor para poder desplazarse en la tierra suelta.

A nivel electrónico es un procesador con sensores en toda su estructura para la toma de decisiones autónomas y tecnología Bluetooth mesh (malla Bluetooth) [15] para lograr la configuración enjambre descrita anteriormente.

El robot cuenta con un espacio en la parte frontal con un compartimiento con barbas retráctiles y rodillos en su interior que al girar en un sentido permiten la recolección del cultivo o su extracción al girar en sentido contrario; así mismo está equipado con leds ultravioleta (UV) que permiten la desinfección del producto recolectado, su rotación interna y liberación de tierra; arriba de esa sección se encuentra una excavadora con extensiones acoplables a palancas que pueden rotar 230 grados para adaptarse a distintas configuraciones.

En la parte trasera cuenta con un brazo extractor mediante un tornillo sin fin con una pinza adaptable al cultivo; debajo de esta se encuentra una cortadora rotativa de raíces.

El modelo del robot configurable a una de las 4CT se describe en la figura 1.

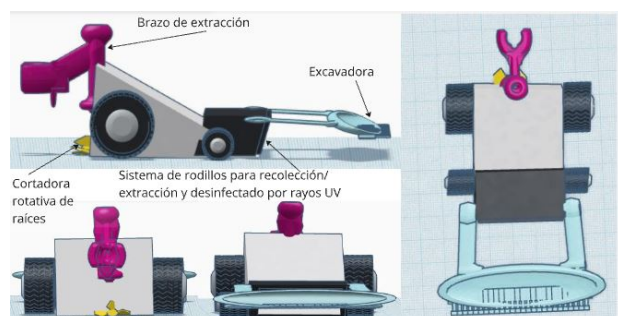


Fig. 1. Estructura del robot configurable

Para la modalidad recolección / extracción la pala se configura rotando 140 grados, a modo de que sirva de cuña y al avanzar capture el cultivo manteniéndolo en el compartimiento gracias a las barbas retráctiles y los rodillos en su interior que al girar en un sentido permiten la recolección del cultivo o su extracción al girar en sentido contrario desinfectando gracias a los leds UV.

La modalidad excavadora consiste en rotar -15 grados a pala, avanzar y levantar hasta 90 grados para retroceder y continuar liberando el cultivo.

En modo extractor la pala se coloca como palanca que actúa junto al brazo extractor mediante un tornillo sin fin con una pinza acoplable al cultivo.

Para la modalidad limpieza de raíces se rota el brazo para dejar espacio de trabajo en la parte posterior para utilizar sin obstáculos la cortadora rotativa de raíces mediante unas aspas flexibles de modo que no son invasivas con el cultivo.

Las configuraciones descritas se describen en la figura 2. Cabe destacar que las transformaciones en las cuatro modalidades del robot configurable requieren una serie de tiempos y movimientos entre cada una de ellas; es por ello que el uso de una sola transformación de modo que cumplan con uno de los cuatro colores de acuerdo al 4CT permite optimizar una estructura enjambre.

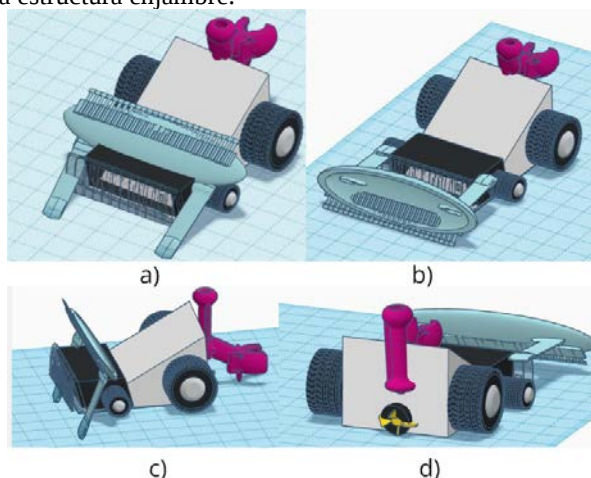


Fig. 2 Configuraciones del robot 4CT: a) Modo recolección / extracción y desinfección b) Modo excavadora c) Modo extracción d) Modo cortadora rotativa de raíces.

Las cuatro posibles configuraciones pueden ser asignados por un identificador utilizando un color de acuerdo al estándar CMYK:

- a) Cian: excavadora
- b) Magenta: brazo de extracción
- c) Amarillo: cortado rotativo de raíces
- d) Negro: recolectar y desinfectar

Al contar con los colores asignados y las necesidades de que no se dupliquen robots vecinos las restricciones del teorema de los cuatro-colores permitirá una configuración adecuada del enjambre en toda la parcela asignada pudiendo modelarse como un grafo plano.

IV. TEORÍA DE GRAFOS.

A continuación, se realiza una serie de definiciones para poder explicar los teoremas y algoritmos propuestos; sin embargo, cabe resaltar que, aunque son considerados en la literatura de la ingeniería como teoremas de distintos autores, en este artículo serán considerados como propuestas, al no realizar la demostración de los mismos.

Definición 1:

Se llama grafo G a un par de conjuntos de vértices v y aristas a (V, A) donde una línea a_0 une a (v_0, v_1) . El grado n de un vértice $sup(v)$ es el número de aristas a que inciden en dicho vértice v [16].

Definición 2:

Un grafo es regular RG si todos sus vértices tienen el mismo grado n [16].

Un RG de grado tres es cúbico o 3-regular; siendo n -regular si todos los vértices son de grado n [16].

Definición 3:

Un camino es una sucesión a consecutivas donde el extremo de una es el origen de la siguiente. Su cota es el número de aristas la longitud del camino $sup(a)$ [17].

Definición 4:

Un circuito es una cadena cerrada donde el vértice inicial se une con el vértice final [17].

Definición 5:

Una cuerda circuito es una arista que une dos vértices no consecutivos en el circuito; siendo Euleriano lo forman aristas distintas y contiene a todas las de G [16].

Definición 6:

Un camino es Hamiltoniano si todos los vértices que forman parte del camino son distintos y pasan por todos los vértices del grafo [17].

Definición 7:

Un anillo, cuello o cintura de un grafo a la longitud de su circuito más corto [16].

Definición 8:

La longitud del circuito más largo se llama circunferencia [17].

Definición 9:

El diámetro se define como la distancia máxima entre dos vértices [17].

Definición 10:

Un grafo se llama conexo CG si cada un (v_0, v_1) están unidos por algún camino [16].

Definición 11:

Un grafo completo N es un grafo N_a en el que cualquier (v_0, v_1) está unido por una a_0 ; es CG , cuenta con $a \frac{(a-1)}{2}$ aristas, es RG de grado $a - 1$ y tiene un diámetro 1 [17].

Definición 12:

Un grafo ciclo o ciclo C_n es un RG grado 2 no dirigido o 1-regular si es dirigido formado por un camino cerrado que no repite vértices excepto la unión de v_0 y v_{max} ; por lo que $v_{max} = a_{max}$ [16].

Definición 13:

Los grafos tienen la propiedad de regularidad [16] que permite estructurar características para generar categorías.

Un grafo RG es n -regular o regular de grado n si todos sus vértices v tienen grado n [16].

Un grafo G es n -semirregular o semirregular de grado n si para cada vértice v tiene grado $\sup(v_0)$ o $\sup(v_1)$; como ejemplo de esta categoría existen los grafos rosas [16].

Definición 14:

Un grafo G es n -pintable en vértices v ; si y sólo si es asignable todo v uno de los n colores existentes, de tal modo que no exista un (v_0, v_1) unidos por una arista a que tengan el mismo color [17].

Definición 15:

El índice cromático de G es n o $c(G) = n$; $n \leq \sup(v)$; si un grafo G es n -pintable en vértices v , pero no para $(n - 1)$ -pintable [17]. Si G es pintable en vértices con un solo color es desconexo y con dos es bipartito como los grafos rosas [16].

Definición 16:

Un grafo G es n -pintable en aristas a ; si y sólo si sus aristas a son pintables con n -colores, de tal modo que no exista un (a_0, a_1) adyacente con el mismo color [16].

Si un grafo G es n -pintable en n aristas, pero no en $(n - 1)$ -pintable; el índice cromático de G será n o $\chi'(G) = n$; $n \geq \sup(a)$ [16].

El índice cromático de un G n -regular es n o $n + 1$; mientras que en uno cúbico es pintable de 3 a 4 colores; mientras que en un grafo completo su índice será [16]:

$$\chi'(N) = x|x \vee \chi'(N) = n - 1 |x \quad (1)$$

Los grafos 3-regulares de índice cromático se denominan “snarks” [18].

El matemático escocés Peter Guthrie Tait desarrolló trabajos de grafos, su composición, descomposición y condiciones de coloreado para cuatro colores.

Definición 17:

Se denomina T o grafo de Tait a un grafo planar compuesto por un conjunto de aristas a que unen a otro conjunto de vértices v entre sí, tal que cada a_0 es adyacente a (v_0, v_1) y cada vértice v está conectado a tres aristas a [19].

Proposición 1:

En 1884 Tait estableció la proposición *1-Factoreabilidad sobre grafos* [19]. La proposición afirma que todo grafo de Tait [19] puede ser descompuesto en un conjunto de *subgrafos 1-factoreables*; por lo que los vértices de un grafo de Tait son divisibles en grupos de tamaño 1 de modo que ninguno de las aristas atraviese los grupos [18].

Definición 18:

Se denomina n -arista-color a una arista a coloreada con n colores; siendo el equivalente al particionado del conjunto total de aristas en n emparejamientos.

El color de las aristas a deberá ser seleccionado de modo que las aristas incidentes tengan un color distinto [16].

Para un grafo cúbico plano, los vértices v les corresponderá aristas a y las aristas a les corresponderá vértices v de un grafo plano máximo; pudiendo tener tantas aristas a , como aristas a de un grafo cúbico plano dual.

Proposición 2:

De acuerdo a Tait [19] es condición necesaria y suficiente para que sea posible el coloreado por cuatro colores de las aristas de un grafo H , que no existan dos aristas a adyacentes del mismo color restringiendo que el índice cromático del grafo H sea igual a tres [19].

Definición 19:

Se denomina coloración de Tait a una 3-arista-color de un grafo cúbico [19].

Definición 20:

Sea H un grafo cúbico homogéneo plano sin aristas de corte. La relación de coloreado entre un grafo plano máximo $G\#$ y el grafo H plano dual cúbico viene dado por la proposición de Tait [19]. que relaciona el coloreado de los vértices de un grafo plano máximo con el coloreado de las aristas de un grafo cúbico dual H . Sin embargo, no afirma que cualquier grafo cúbico sin puentes tenga clase cromática igual a tres.

El grafo cúbico H con n vértices y m aristas es obtenido mediante:

El grafo cúbico H con v vértices y a aristas es obtenido mediante:

$$a = \frac{3v}{2} \quad (2)$$

Para este tipo de grafos el número de aristas es múltiplo de tres [17]:

$$a \equiv 0(mod 2) \quad (3)$$

Como se describió anteriormente; para un grafo cúbico el número de aristas a deberá ser $\mathbb{Z}$. El número de vértices v en un grafo cúbico homogéneo deberá ser par [17]:

$$v \equiv 0(\text{mod } 2) \quad (4)$$

V. ALGORITMO PARA EL COMPORTAMIENTO DEL ENJAMBRES ROBOT 4CT

Sea G el grafo plano que describe al enjambre de robótica agrícola encargado de la cosecha sobre una parcela con conexiones arbitrarias. El grado de cada vértice v que representa a uno de los individuos es mayor que dos y cada arista a no triangular será dividida en distintas aristas a de forma triangular añadiendo nuevas a .

El grafo resultante de esta división es el grafo plano máximo G' que cuenta con todas sus aristas triangulares.

Si G' se encuentra coloreado; la eliminación de nuevas aristas a incorporadas no cambiará su color [6].

Si se coloca un vértice v_0 para cada arista a del grafo G' , entonces a cada arista q del grafo G' le corresponderá una arista q_0 que une a los vértices v_{0i} y v_{0j} ; siendo estas las aristas a_i y a_j de ambos lados de la arista q .

Como resultado del proceso anterior se obtiene un grafo plano conexo que se denomina dual a G' ; siendo un grafo cúbico (homogéneo grado tres).

Con lo anterior se infiere que el menor número de colores necesarios para el proceso de coloreado de n aristas a en un grafo H es el índice cromático o el número cromático de aristas. El 4CT indica que cada grafo cúbico sin puentes admite una coloración Tait (Definición 19) [19].

Si un grafo cúbico H tiene una clase cromática tres, sus aristas a deberán estar coloreadas en tres colores. El coloreado implica la existencia de tres aristas a de distinto color para cada vértice v del grafo H .

Definición 21:

Partiendo de la definición 20; un grafo cúbico con clase cromática tres se denomina grafo cúbico planar H coloreado [17].

En la figura 3 se muestra un grafo cúbico coloreado H que utilizará los colores de las cuatro posibles configuraciones asignados por un identificador utilizando un color de acuerdo al estándar CMYK donde:

- a) C o Cian: excavadora
- b) M o Magenta: brazo de extracción
- c) A o Amarillo: cortado rotativo de raíces
- d) N o Negro: recolectar y desinfectar.

Lo anterior se describe en la tabla 1.

Tabla 1. Distribución de colores

Color	v	v	a	Función
Negro	N	0		Desinfectar
Cian	C	1	————	Excavadora
Magenta	M	2		Extracción
Amarillo	A	3		Cortado rotativo

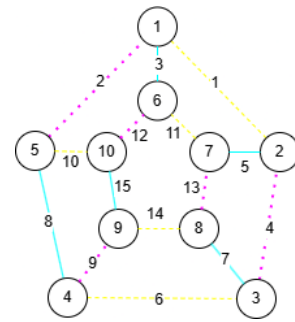


Fig. 3 Coloreado de aristas en un gráfico cúbico H.

Utilizando la proposición 2 de Tait [19], el coloreado de aristas a pintará las caras de un grafo cúbico plano H ; así mismo el coloreado de esas caras pintará a las aristas a del mismo color.

En la figura 4 se muestran cuatro formas de pintar las aristas a .

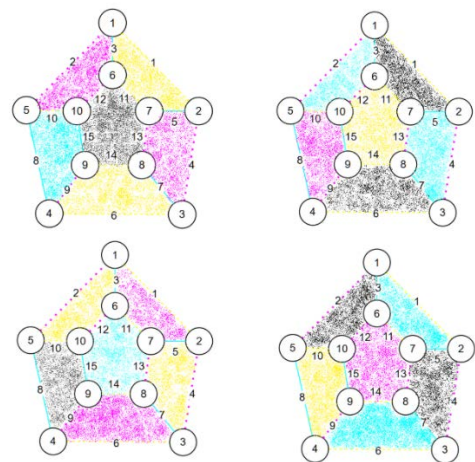


Fig. 4 Coloreado de caras de un grafo cúbico plano.

El vértice v corresponde a la arista a de un grafo cúbico plano dual.

El grupo de Klein de orden cuatro [16] es una estructura que describe simultáneamente el coloreado de ambas aristas del grafo cúbico plano sin puentes y aristas.

El grupo está formado por un conjunto de colores a los cuales se les aplica la operación de transformación [17] como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Estructura de coloreado del grafo

+	0	1	2	3
N	N	C	M	A
C	C	N	A	M
M	M	A	N	C
A	A	M	C	N

Asociando el límite de una cara con un ciclo, a partir de la base de cuas Ciclos de un grafo cúbico plano; un cuas Ciclo es un ciclo con valor (v_0, v_1) .

Un cuas Ciclo Hamiltoniano con valencia de vértices $v = 2$ pasará por todos los elementos de V de G [20].

Sea $G = (V, A)$ un grafo formado por el conjunto de aristas $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

S_G será el conjunto de todos los subgrafos de G .

La suma anular para el conjunto S_G generará el siguiente grupo Abeliano [21]:

$$(X, A_1) \oplus (X, A_2) = (V, \frac{(A_1 \cup A_2)}{(A_1 \cap A_2)}) \quad (5)$$

Dado que S_G (5) es un grupoide, se le asignará a cada subgrafo $G = (X, A)$ una cadena $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{Sup(a)}) | i = (1, 2, \dots, Sup(a))$.

La suma de cadenas queda definida por componentes módulo dos, lo que permite obtener un grupoide S_G (5) isomórfico cuyos elementos son todas las posibles cadenas binarias con longitud $Sup(a)$ que conforman un grupo Abeliano [21] de pertenencia a A .

$$\alpha_i = \begin{cases} 1; & \text{si } a_i \in A \\ 0; & \text{si } a_i \notin A \end{cases} \quad (6)$$

Considérese el grupo S_G como un espacio lineal sobre el campo de coeficientes binarios $GF(2) = \{0, 1\}$, llamado espacio de subgrafos [21] del grafo G . La dimensión del espacio $L_G = Sup(a)$; debido que al multiplicar los elementos: $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, 1)$, que representan subgrafos de una sola a .

Proposición 3:

De acuerdo a Petersen [22] todo grafo cúbico sin puentes puede representarse como una suma 1-factor o 2-factor.

Cada cuasiciclo Hamiltoniano es 2-factor del grafo [20], ya que si el factor n es un suagra regular grado n , se cumplirá la proposición de Petersen [22].

Definición 22:

Sea un disco de color cada ciclo simple de duración uniforme formado por cuasiciclos Hamiltonianos [20] 2-factor compuesto por varios ciclos simples, como se muestra en la figura 5-a, 5-b y 5-c. En la figura 5-d se muestran dos discos del mismo color; uno a lo largo de las aristas $\{a_2, a_3, a_8, a_9, a_{12}, a_{15}\}$ y el segundo por las aristas $\{a_4, a_5, a_7, a_{13}\}$; generando un cuasiciclo Hamiltoniano formado por los discos de colores descritos anteriormente.

Definición 23:

Se denomina cuasiciclo Hamiltoniano coloreado o 2-factor coloreado [20] a todo grafo cúbico coloreado donde existe una configuración de coloreo formado por 2-factor coloreados con discos de longitud par y 1-factor coloreado.

Por lo que todo cuasiciclo Hamiltoniano coloreado está formado por discos [20]. Si solo existe un disco coloreado; entonces ese cuasiciclo Hamiltoniano es necesariamente un ciclo Hamiltoniano [20].

Las propiedades de los grafos cúbicos planos coloreados tienen las siguientes propiedades.

Propiedad 1.

En todo disco coloreado el número de vértices v es par. Para que un disco tenga color, es condición necesaria que sus aristas a sean de dos colores y que el número de vértices v del ciclo sea par [20].

Propiedad 2.

Todo cuasiciclo Hamiltoniano [20] coloreado 2-factor genera dos nuevos cuasiciclos Hamiltonianos coloreados produciendo un coloreo en H [20].

Si se genera un cuasiciclo Hamiltoniano coloreado; entonces las aristas de este grafo 2-factor se pueden colorear con dos colores distintos a los suyos y los bordes sin color son el color del propio cuasiciclo Hamiltoniano 2-factor; por lo que el grafo cúbico será coloreado y el coloreo de sus aristas generará tres nuevos cuasiciclos Hamiltonianos coloreados 2-factor [20].

Propiedad 3.

La suma módulo 2 de tres cuasiciclos Hamiltonianos coloreados 2-factor son generados por pintar el grafo cúbico H el cual es un conjunto vacío [20].

Debido a que a lo largo de cada arista existen dos cuasiciclos Hamiltonianos [20] coloreados y como cada arista aparece dos veces en la suma; al ser sumada en módulo 2, es idéntica a $\emptyset$ [20].

La suma de los cuasiciclos Hamiltonianos coloreados generados por un coloreo regular del grafo cúbico H es $\emptyset$.

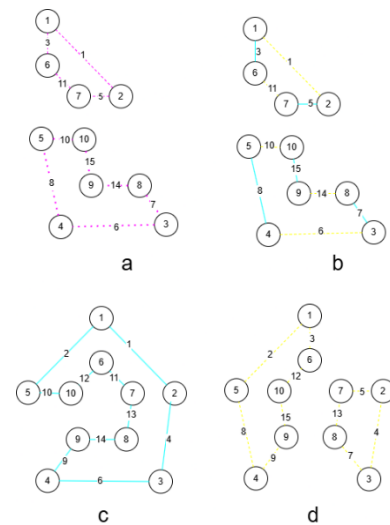


Fig. 5. Pintado de cuasiciclos Hamiltonianos 2-factor. a) Cuasiciclo Hamiltoniano magenta (2-factor). b) Cuasiciclo Hamiltoniano magenta pero formado por las aristas cian y amarillo. c) Cuasiciclo Hamiltoniano cian. d) Cuasiciclo Hamiltoniano amarillo.

Un functor de Mac Lane es definido sobre el subespacio de ciclos en un grafo G ; si G es plano, su valor será cero [24] como se muestra a continuación:

$$F(C) = \sum_{i=1}^{Sup(a)} ((S_i - 1) \cdot (S_i - 2)) = (\sum_{i=1}^{Sup(a)} S_i^2 - 3) \cdot (\sum_{i=1}^{Sup(a)} S_i + 2(Sup(a))) \quad (7)$$

Donde S_i es el número de ciclos isométricos [24] que recorren la arista i .

Teniendo en cuenta lo anterior (6) y la operación adición anular; los cuasiciclos Hamiltonianos coloreados [20] y 1-factor coloreado; los factores tienen las siguientes propiedades:

$$Cian_c \oplus Amarillo_c \oplus Magenta_c = \emptyset \quad (8)$$

$$Cian_f \oplus Amarillo_f \oplus Magenta_f = H \quad (9)$$

$$Cian_f \oplus Amarillo_c = H \quad (10)$$

$$Amarillo_f \oplus Amarillo_c = H \quad (11)$$

$$Magenta_f \oplus Magenta_c = H \quad (12)$$

Definición 24:

Partiendo de la definición 23: sea c el conjunto de aristas a pertenecientes a un 2-factor (cuasíciclo Hamiltoniano) [20] y f el conjunto de aristas c pertenecientes al 1-factor.

Definición 25:

Sea H el conjunto del grafo cúbico plano resultante de las aristas. En un grafo cúbico coloreado, cualquier 2-factor coloreado es la suma anular finita de la base de ciclos [20]:

C_c – suma de la base de ciclos que forman el 2-factor Cian.

M_c – suma de la base de ciclos que forman el 2-factor Magenta.

A_c – suma de la base de ciclos que forman el 2-factor Amarillo.

N_c – suma de la base de ciclos no incluidos en los anteriores 2-factor pintados en Cian, Magenta y Amarillo.

Definición 26:

A partir de la definición 24 se propone: $\overline{C_c}, \overline{M_c}, \overline{A_c}$ como los complementos correspondientes a las bases de ciclos C_c, M_c, A_c a la base de ciclos completa del grafo plano y a la arista del grafo H .

La propiedad de dualidad [20] en una estructura de 2-factor coloreados se describe mediante:

$$C_c = \overline{C_c}; M_c = \overline{M_c} \text{ y } A_c = \overline{A_c} \quad (13)$$

Siendo:

$$C_c \oplus \overline{C_c} = M_c \oplus \overline{M_c} = A_c \oplus \overline{A_c} = \emptyset \quad (14)$$

VI. COLOREADO DE CARAS DEL GRAFO CÚBICO PLANO H .

Definición 27:

Se denomina cara a una celda delimitada por un ciclo básico. Tres 2-factor coloreados producen una coloración de las caras de un grafo cúbico plano N .

A sí mismo, el coloreado de las caras genera la coloración de la base de ciclos en el color de una cara; ya que un ciclo básico sirve como límite para una cara.

Definición 28:

Una base de ciclos de un grafo no dirigido es un conjunto de ciclos simples que forma una base del espacio de ciclos del grafo, siendo el conjunto mínimo de ciclos que permiten expresar cada subgrafo de grado par como una diferencia simétrica de base de ciclos. En grafos planos el conjunto de ciclos acotados de una incrustación del grafo formará una base de ciclos [20].

Proposición 4:

De acuerdo con Mac Lane [25] en grafos cúbicos planares coloreados la suma anular de base de ciclos y aristas es igual a [25]:

$$\sum_{i=1}^{Sup(a)-v+1} C_i \oplus C_0 = \emptyset \quad (15)$$

Por otro lado, la suma anular de tres cuasíciclos Hamiltonianos coloreados viene dada por [20]:

$$C_c \oplus M_c \oplus A_c = \emptyset \quad (16)$$

Utilizando (15) y (16) se logra la condición de planaridad de Mac Lane [25] descrita como la suma de las bases de ciclos y una arista a con la suma anular de tres 2-factor coloreados para un grafo cúbico plano H .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{Sup(a)-v+1} C_i \oplus C_0 &= \\ C_c \oplus M_c \oplus A_c &= \overline{C_c} \oplus \overline{M_c} \oplus \overline{A_c} = \\ \overline{C_c} \oplus M_c \oplus A_c &= C_c \oplus \overline{M_c} \oplus \overline{A_c} = \\ C_c \oplus \overline{M_c} \oplus A_c &= \overline{C_c} \oplus M_c \oplus \overline{A_c} = \\ C_c \oplus M_c \oplus \overline{A_c} &= \overline{C_c} \oplus \overline{M_c} \oplus A_c = \emptyset \end{aligned} \quad (17)$$

Si en un grafo cúbico plano coloreado H la suma anular de las bases de ciclos que describen las fronteras de todas las caras de color: la suma de color Cian se denota como $\sum g_c$, la suma de color Magenta como $\sum g_m$, la suma de color Amarillo como $\sum g_a$ y la suma de color negro como $\sum g_n$; respecto a las aristas se pueden escribir las siguientes tres expresiones de acuerdo a la definición 25:

$$A_c = \sum g_c \oplus \sum g_m = \sum g_a \oplus \sum g_n \quad (18)$$

$$M_c = \sum g_c \oplus \sum g_a = \sum g_m \oplus \sum g_n \quad (19)$$

$$C_c = \sum g_a \oplus \sum g_m = \sum g_c \oplus \sum g_n \quad (20)$$

Estos tres 2-factor coloreados producen una coloración de las caras; donde los límites de las caras son las bases de ciclos y las aristas del grafo plano H .

Siendo las tuplas: $[c_i, a_{i,1} \times 1 + a_{i,2} \times 2 + a_{i,3} \times 3 + a_{i,4} \times 0]$; donde C es el conjunto de las bases de ciclos iterativos de un grafo cúbico plano, mientras que H y K son un conjunto de cuatro ramas.

El conjunto P caracteriza la coloración de las caras de un gráfico cúbico plano H y es el producto de los elementos del conjunto C con los elementos del conjunto K .

VII. EXISTENCIA DE UN DISCO COLOREADO QUE PASA A LO LARGO DE BORDES ENTRELAZADOS.

Definición 29:

Utilizando la definición 22 y 23: existe un disco coloreado [20] que pasa a lo largo de aristas enlazadas que pertenecen al ciclo básico en un gráfico cúbico plano arbitrario sin puentes. Denotaremos el grafo previo como G_ξ y al que le sigue como $G_{\xi+1}$.

Lema 1.

Si en el grafo cúbico coloreado previo sin puentes G_ξ existe un disco coloreado que pasa a lo largo de dos aristas vinculadas; entonces el grafo cúbico siguiente $G_{\xi+1}$ está coloreado.

Demostración.

Utilizando la proposición 3 de Petersen [22], el “siguiente” grafo cúbico $G_{\xi+1}$ consta de 1-factor y 2-factor; por lo que si en el grafo cúbico coloreado anterior G_ξ existe un disco coloreado que pasa a lo largo de las aristas concatenadas, el disco coloreado correspondiente que pasa a lo largo de los vértices de la arista recién introducida en el grafo $G_{\xi+1}$ se incrementará en dos unidades y puede diseccionarse pintando el color del disco correspondiente en el grafo G_ξ .

El borde recién introducido en $G_{\xi+1}$ pertenece al 1-factor y también está coloreado del color del disco que pasa a lo largo de los vértices de la arista introducida; por lo tanto, en este caso, el grafo $G_{\xi+1}$ es pintable ■.

Lema 2.

Si en el grafo cúbico coloreado anterior sin puentes G_{ξ} no existe un disco vectorial que pase a lo largo de dos aristas conectadas; el siguiente grafo cúbico $G_{\xi+1}$ sin puentes no es plano y no se puede pintar.

Demostración.

Si en G_{ξ} no existe algún disco coloreado que pase a lo largo de los bordes concatenados y existen dos discos de colores idénticos que pasan a lo largo de las aristas entrelazadas.

Después de introducir una nueva arista en el siguiente grafo $G_{\xi+1}$ alguna arista adyacente en el disco correspondiente debe colorearse de color negro para cumplir con las reglas de pintado.

Cada disco que pasa por la parte superior de la nueva arista aumenta su longitud en una unidad y se convierte en un disco de longitud impar, como se muestra en la figura 6.

El borde coloreado de Negro debe ser inducido por tres bases de ciclos de diferentes colores para satisfacer la transformación grupal de Klein [16] para: $N = (C + M + A)$

Lo anterior contradice la condición de planaridad de la proposición de Mac Lane [25] donde un grafo es plano si y sólo si existen bases de ciclos de modo que no pasen más de dos ciclos a lo largo de cada arista.

Por lo tanto, el grafo resultante no es plano.

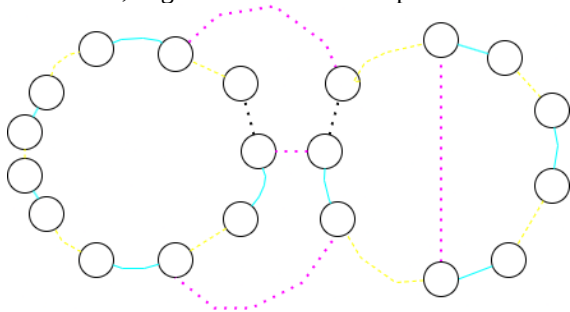


Fig. 6. Introducción de bordes negros en un grafo cúbico plano donde los bordes negros son inducidos.

Si se induce un borde de color negro (marcado con puntos) mediante dos bases de ciclos multicolores (caras) que tienen una arista común para satisfacer la conversión del grupo de Klein [26]:

$N = (C + C) \wedge (M + M) \wedge (A + A) \wedge (N + N)$; donde surge una contradicción en la coloración de ciclos (caras) adyacentes a los ciclos (caras) pintadas.

Estos ciclos deben pintarse de un color en el lado de una arista y de un color distinto en el lado de la otra arista.

Los ciclos se describen en la figura 7 en donde se designan con un signo de interrogación; es decir, los ciclos deben ser pintados con dos colores a la vez, lo cual es imposible siendo una contradicción.

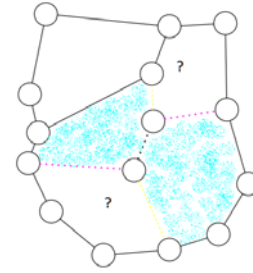


Fig. 7. El caso de la coloración indefinida de ciclos adyacentes.

Por lo tanto; el grafo resultante no es pintable y el lema se demuestra ■.

El lema establece que la aparición de una arista blanca en $G_{\xi+1}$ caracteriza un grafo cúbico no plano y sin color ■.

Teorema 1.

Partiendo de la definición 29: en un grafo cúbico coloreado del plano anterior sin puentes (G_{ξ}); existe un disco coloreado que pasa a lo largo de los bordes entrelazados.

Demostración.

Si la arista recién introducida pertenece al ciclo básico de G_{ξ} , entonces el grafo $G_{\xi+1}$ es plano por construcción; pero cuando una arista blanca no pueda existir en un grafo plano de acuerdo a la proposición de Klein [26], entonces la existencia de tres ciclos que pasen a lo largo de una arista del grafo es imposible.

Por lo tanto; las aristas del grafo sólo son pintables en tres colores, por lo que en G_{ξ} existe un disco de color que pasa a lo largo de las aristas conectadas.

Lo anterior es aplicable a todo el conjunto de grafos cúbicos planos coloreados ■.

VIII. COLORACIÓN DE UN GRÁFICO CÚBICO PLANO

Teorema 2.

La clase cromática de un gráfico cúbico plano arbitrario sin puentes es igual a tres.

Demostración.

Utilizando el método de inducción matemática, se parte en que los bordes de un gráfico cúbico plano mínimo [16] siempre se pueden colorear con tres colores.

Un grafo mínimo se muestra en la figura 8.

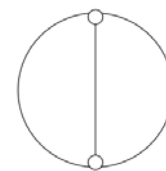


Fig. 8. Grafo cúbico mínimo

Si existe un grafo cúbico plano anterior coloreado ausente de puentes; entonces se le puede introducir una nueva arista en un ciclo básico o arista arbitraria para obtener un grafo cúbico plano coloreado posterior sin puentes.

Utilizando el teorema 1, esta nueva arista está necesariamente coloreada; por lo tanto, el siguiente grafo cúbico plano sin puentes estará coloreado ■.

Corolario.

En un grafo cúbico plano sin puentes existe un 2-factor coloreado con discos de longitud uniforme.

Teorema 3.

De acuerdo a Vizing [27] todo grafo no dirigido sin bucles puede colorearse con como máximo $\Delta + \mu$ colores; donde μ es la multiplicidad del grafo [27].

Se requiere al menos Δ colores; por los grafos no dirigidos se dividen en dos clases: 1: los que son suficientes Δ colores y 2: los que son necesarios $\Delta + \mu$ colores [27].

Demostración.

Utilizando el teorema 2, la demostración del lema 1 y lema 2, se deduce que los grafos cúbicos planos sin puentes deben clasificarse como clase 1 [27] ■.

IX. TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES.

Teorema 4.

El número cromático de un gráfico máximamente plano es igual a cuatro [8].

Demostración

Utilizando la proposición 2 (Tait) [19], proposición 4 (Mac Lane) [24][25] y la demostración de los lemas 1 y lema 2 de acuerdo a la definición 28 de las bases de ciclos [20]; se deduce que las aristas de un grafo cúbico plano H son el doble que los vértices de un grafo plano máximo G [20] ■.

X. COLOREADO DE LAS ARISTAS DE UN GRAFO CÚBICO PLANAR

Teorema 5:

Un grafo cúbico planar sin puentes tendrá una clase cromática tres.

Demostración.

Utilizando el método inductivo; las aristas de un grafo cúbico planar mínimo siempre pueden colorearse en tres colores, como se mostró en la figura 8■.

XI. ROTACIÓN DE DISCOS DE COLORES.

Para encontrar un disco que pase por las aristas conectadas, se necesita la operación: repintado de aristas.

Definición 30:

Partiendo de las definiciones 22,29,23 y el lema 2; se introduce la operación de rotación Hamiltoniana del disco pintado, definida como el cambio en el orden de pintado respecto a las aristas del disco.

La rotación del disco conduce a un cambio de otros cuasiciclos Hamiltonianos coloreados. En la figura 5-a se muestra el disco magenta antes de la operación “rotación” y en la figura 5-b se muestra el disco magenta después de la operación “rotación”.

La operación de rotación de disco puede describirse como el reordenamiento de dos aristas en otros 2-factor coloreados, como se muestra en el grafo de la figura 6, en donde los 2-factor coloreados antes de la rotación del disco magenta eran:

$$\text{2-factor magenta: } \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{14}\} \quad (21)$$

$$\text{2-factor cian: } \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{15}\} \quad (22)$$

$$\text{2-factor amarillo: } \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{12}, e_{14}, e_{15}\} \quad (23)$$

Después de la rotación del disco magenta la configuración de los 2-factor es los siguientes:

$$\text{2-factor magenta: } \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{14}\} \quad (24)$$

$$\text{2-factor cian: } \{e_1, e_2, e_4, e_7, e_8, e_9, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{15}\} \quad (25)$$

$$\text{2-factor amarillo: } \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{15}\} \quad (26)$$

Para los 2-factor cian y amarillo, se han conmutado utilizando las ecuaciones (21) a las (26) los siguientes pares de aristas: e_6 por e_7 , e_8 por e_{10} y e_{13} por e_{14} .

Al aplicar las técnicas anteriormente descritas; se pueden obtener los grafos pintados antes y después de la operación “rotación” anteriormente descrita; como se muestra en la figura 9.

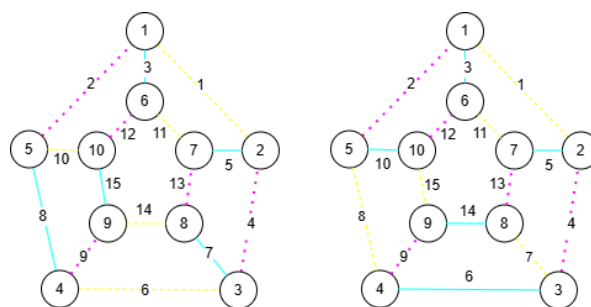


Fig. 9. Coloreado del grafo antes y después la rotación

Consideremos el caso en donde para colorear un nuevo borde es necesario aplicar la operación de rotación de disco anteriormente descrita en la definición 30 para colorear una nueva arista.

Ejemplo 1.

La Figura 10 muestra la coloración de un grafo cúbico en donde los extremos de una arista recién introducida pertenecen a dos discos magentas y a dos discos amarillos [20].

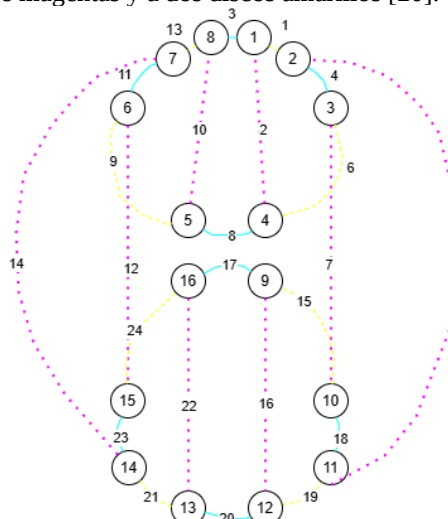


Fig.10. Dos discos del mismo color con la introducción de aristas 8 y 17.

Considérese la metodología de pintado para el grafo cúbico H de la figura 11 partiendo de la selección de la base de ciclos:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{e_2, e_3, e_8, e_{10}\} \\
 c_2 &= \{e_1, e_2, e_4, e_6\} \\
 c_3 &= \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{13}\} \\
 c_4 &= \{e_4, e_5, e_7, e_{18}\} \\
 c_5 &= \{e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{23}\} \\
 c_6 &= \{e_6, e_7, e_8, e_9, e_{12}, e_{15}, e_{17}, e_{24}\} \\
 c_7 &= \{e_{16}, e_{17}, e_{20}, e_{22}\} \\
 c_8 &= \{e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}\} \\
 c_9 &= \{e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}
 \end{aligned} \tag{27}$$

Lo que generará la arista:

$$c_0 = \{e_1, e_3, e_5, e_{13}, e_{14}, e_{19}, e_{20}, e_{21}\} \tag{28}$$

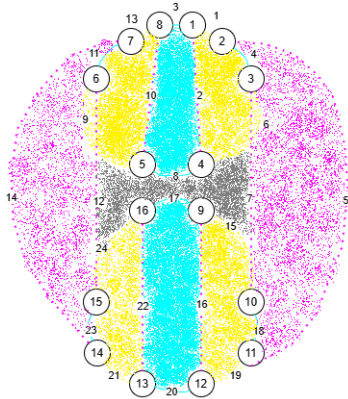


Fig. 11. Coloración de las bases de ciclos.

Entonces los 2-factor pintados pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Cian}_c &= (c_2 \oplus c_4 \oplus c_8) \oplus (c_3 \oplus c_5 \oplus c_9) = \\
 &= (\{e_1, e_2, e_4, e_6\} \oplus \{e_4, e_5, e_7, e_{18}\} \oplus \{e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}\}) \oplus \\
 &= (\{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{13}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{23}\} \oplus \{e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}) \\
 &= \{e_1, e_2, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{19}, e_{21}, e_{22}, e_{24}\}
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Magenta}_c &= (c_1 \oplus c_2 \oplus c_3) \oplus (c_7 \oplus c_8 \oplus c_9) = \\
 &= (\{e_2, e_3, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_1, e_2, e_4, e_6\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{13}\}) \oplus \\
 &= (\{e_{16}, e_{17}, e_{20}, e_{22}\} \oplus \{e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}\} \oplus \{e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}) \\
 &= \{e_1, e_3, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{11}, e_{13}, e_{15}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{23}, e_{24}\}
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Amarillo}_c &= (c_1 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_7) = \\
 &= (\{e_2, e_3, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_4, e_5, e_7, e_{18}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{23}\}) \oplus \\
 &= \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{22}, e_{23}\}
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Negro}_c &= (c_6 \oplus c_0) = \\
 &= (\{e_6, e_7, e_8, e_9, e_{12}, e_{15}, e_{17}, e_{24}\} \oplus \{e_1, e_3, e_5, e_{13}, e_{14}, e_{19}, e_{20}, e_{21}\}) = \\
 &= \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{24}\}
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{Cian}_c} &= (c_1 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_0) = \\
 &= (\{e_2, e_3, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_{16}, e_{17}, e_{20}, e_{22}\} \oplus \{e_6, e_7, e_8, e_9, e_{12}, e_{15}, e_{17}, e_{24}\} \oplus \{e_1, e_3, e_5, e_{13}, e_{14}, e_{19}, e_{20}, e_{21}\}) \\
 &= \{e_1, e_2, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{19}, e_{21}, e_{22}, e_{24}\}
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{Magenta}_c} &= (c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_0) = \\
 &= (\{e_4, e_5, e_7, e_{18}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{23}\} \oplus \{e_6, e_7, e_8, e_9, e_{12}, e_{15}, e_{17}, e_{24}\} \oplus \{e_1, e_3, e_5, e_{13}, e_{14}, e_{19}, e_{20}, e_{21}\}) \\
 &= \{e_1, e_3, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{11}, e_{13}, e_{15}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{23}, e_{24}\}
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{Amarillo}_c} &= (c_2 \oplus c_3 \oplus c_6 \oplus c_8 \oplus c_0) = \\
 &= (\{e_1, e_2, e_4, e_6\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{13}\} \oplus \{e_6, e_7, e_8, e_9, e_{12}, e_{15}, e_{17}, e_{24}\} \oplus \{e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}\} \oplus \{e_1, e_3, e_5, e_{13}, e_{14}, e_{19}, e_{20}, e_{21}\}) \\
 &= \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{22}, e_{23}\}
 \end{aligned} \tag{34}$$

Para realizar la operación rotación de disco, se procede a girar dos discos unitarios de color amarillo de la forma:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{e_2, e_3, e_8, e_{10}\} \\
 c_7 &= \{e_{16}, e_{17}, e_{20}, e_{22}\}
 \end{aligned} \tag{35}$$

El nuevo coloreado contiene un conjunto distinto al coloreado 2-factor y 1-factor; quedando pintado el nuevo disco amarillo y la arista agregada de color cian agregado de forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Cian}_c &= (c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_9) = \\
 &= (\{e_2, e_3, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_1, e_2, e_4, e_6\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{13}\}) \oplus \\
 &= (\{e_4, e_5, e_7, e_{18}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{23}\} \oplus \{e_{16}, e_{17}, e_{20}, e_{22}\}) \oplus \\
 &= (\{e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}\} \oplus \{e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}) \\
 &= \{e_1, e_3, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{24}\}
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Magenta}_c &= (c_2 \oplus c_3 \oplus c_8 \oplus c_9) = \\
 &= (\{e_1, e_2, e_4, e_6\} \oplus \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{13}\} \oplus \{e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}\} \oplus \{e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}) = \\
 &= \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Amarillo}_c &= (c_1 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_7) = \\
 &= (\{e_2, e_3, e_8, e_{10}\} \oplus \{e_4, e_5, e_7, e_{18}\} \oplus \{e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{23}\} \oplus \{e_{16}, e_{17}, e_{20}, e_{22}\}) = \\
 &= \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{22}, e_{23}\}
 \end{aligned} \tag{38}$$

Al haber realizado la operación rotación de dos discos amarillos; esta permitió trasladar los colores de una base de ciclos desde cian hasta magenta; como se muestra en la figura 12.

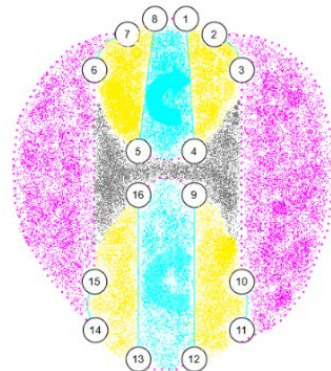


Fig. 12. Nueva coloración de aristas y base de ciclos

Con la rotación anterior la nueva arista puede colorearse de color cian, como se muestra en la figura 13.

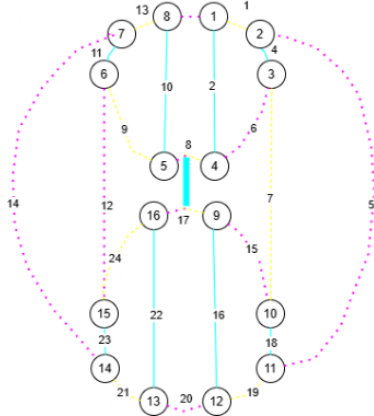


Fig. 13. Nueva coloración de aristas y las bases de ciclos con la inserción de la nueva arista.

Las aristas del ciclo Hamiltoniano [20] se colorean secuencialmente con dos colores. El resto de aristas pertenecientes al 1-factor del grafo se colorean con el tercer color.

XII. ALGORITMO PARA EL POSICIONAMIENTO DEL ENJAMBRE ROBOT MEDIANTE EL COLOREADO DE ARISTAS.

El algoritmo de control de la modalidad que adoptará cada uno de los robots del enjambre mediante el coloreado de aristas se describe en la figura 14.

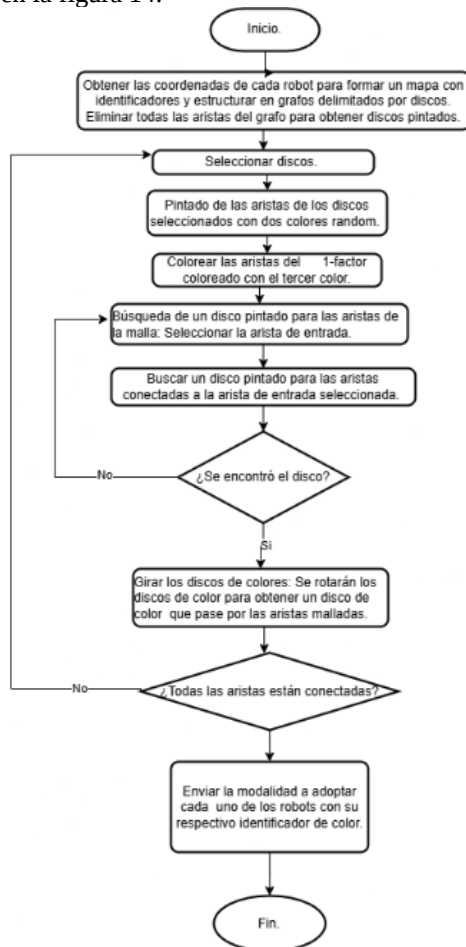


Fig. 14. Algoritmo para el posicionamiento en donde se realiza la descripción a discos y coloreado de aristas para el control del enjambre.

XIII. CONCLUSIONES.

En este trabajo se demuestra que la coloración de aristas y caras en un grafo cúbico plano para un enjambre de robots configurables en 4 modalidades de acuerdo al 4CT utilizando un modelo matemático de grafo sin puentes que mediante las leyes de transformaciones del grupo de Klein [26] de orden cuatro de acuerdo a los elementos de la definición 21 aplicados en las demostraciones 2 y 3.

A partir de este planteamiento, se presenta una demostración deductiva del teorema de los cuatro colores [8]; descrita en el teorema 4 y su demostración partiendo de la definición 28 de las bases de ciclos [20] mediante la proposición 2 (Tait), lema 1 y lema 2 con sus demostraciones; que describen que las aristas de un grafo cúbico plano H son el doble que los vértices de un grafo plano máximo G .

La demostración se basa en las tres propiedades descritas de la definición 22 [20] de los grafos planos; teniendo en cuenta la estrecha relación entre la coloración de las aristas de un grafo cúbico plano y la coloración de sus aristas mediante las demostraciones 1 y 2.

Para llevar a cabo el proceso computacional de coloreado y recolorado de aristas de un grafo cúbico plano en tres colores, se introduce la operación “rotación de discos coloreados” descrita en la definición 30.

La complejidad computacional del algoritmo puede definirse como $Y(m)$ en función del número de aristas eliminadas del grafo G .

El modelo es aplicable a drones transformables o que activen colores para realizar formaciones utilizando las restricciones del 4CT.

REFERENCIAS

- [1] S. Guler, B. Fidan, V. L. Gazi, *Adaptive Swarm Coordination and Formation Control*, in *Handbook of Research on Design, Control, and Modeling of Swarm Robotics*. T. Itami editor, IGI Global, USA, p.p. 175-206, 2016.
- [2] F. Arvin, J. Murray, C. Zhang and S. C. Yue, *An autonomous micro robot for swarm robotic applications*, in *Int. J. Adv. Robot. Syst* 11, p. 113, 2014.
- [3] M. G. Hinchey, R. Sterritt and C. Rouff, *Swarms and swarm intelligence*. Computer 40, p.p. 111–113, 2007.
- [4] E. Bonabeau, D.D.R.D.F. Marco, M. Dorigo and G. Théraulaz, *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems* 1, Oxford University Press, Oxford, UK, 1999.
- [5] A. Puliafito, L. Hufnagel, P. Neveu, S. Streichan, A. Sigal, D.K. Fyngenson and B.I. Shraiman, *Collective and single cell behavior in epithelial contact inhibition*. Proc. Natl. Acad. Sci. 109, p.p. 738–745, USA, 2012.
- [6] Sahin, E. *Swarm robotics: From sources of inspiration to domains of application*, in *Proceedings of the International Workshop on Swarm Robotics*, Santa Monica, CA, USA, p.p. 10–20, 17 July 2004.
- [7] R. Fritsch and G. Fritsch, *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof*, Springer, p. 5, 1998.
- [8] W. Robin, *Four colors suffice: how the map problem was solved*, Princeton University Press, 2002.
- [9] K. Appel y W. Haken, *The solution of the four-color-map problem*, Scientific American 237, p.p. 108-121, 1977.
- [10] K. Appel y W. Haken, *Every planar map is four colourable, Part I: discharging*, Illinois Journal of Mathematics 21, p.p. 429-490, 1977.

- [11] K. Appel y W. Haken and J. Koch, *Every planar map is four colourable, Part II: reducibility*, Illinois Journal of Mathematics 21, p.p. 491-567, 1977.
- [12] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*, CRC Press, p. 221, 2005.
- [13] R. M. Rogers, *The Four-Color Problem: The Journey to a Proof and the Results of the Study*, Honors Theses, p. 420, 2020.
- [14] K. Appel y W. Haken, *Graph Theory as I Have Known It (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications)*, 1st Edition from W. T. Tutte, Clarendon Press, 1998.
- [15] Bluetooth Mesh technology, <https://www.bluetooth.com/learn-about-bluetooth/feature-enhancements/mesh/> consultado el 15 de enero de 2024.
- [16] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, London, 1996.
- [17] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1969.
- [18] M. Gardner, *Snarks, boojums, and other conjectures related to the four-color-map theorem*, Mathematical Games, Scientific American, 4, p.p. 126–130, 1976.
- [19] P. G. Tait, *Note on the circles of curvature of a plane curve*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 14, p. 4, 1896.
- [20] M. Rahman, and M. Kaykobad, *On Hamiltonian cycles and Hamiltonian paths*, Information Processing Letters 94. p.p. 37-41, 2005.
- [21] J. J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics 148, Fourth edition, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [22] J. Petersen, *Die Theorie der regulären graphs*, Acta Mathematica 15, p.p. 193–220, 1891.
- [23] N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas, *Tutte's three-edge coloring conjecture*, J. Combin.Theory 70, p.p. 166–183, 1997.
- [24] S. Mac Lane, *The Development and Prospects for Category Theory*, Applied Categorical Structures 4, p.p. 129–136, 1996.
- [25] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer, New York, 1998.
- [26] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Berlin, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [27] V. G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a p-graph*, Diskret. Analiz. 3, p.p. 25–30, 1964.

Propuestas matemáticas para grafos, teorema de los cuatro colores y probabilidad.

Fernando Gustavo Isa Massa

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Tucumán

San Miguel de Tucumán – Tucumán, Argentina

ferim74@yahoo.com.ar

<https://orcid.org/0000-0002-8609-249X>

Resumen- Es indispensable en la era de la ciencia y tecnología la investigación básica en nuevos modelos como los que se incluyen: modelo de probabilidad para el teorema de los cuatro colores y otro modelo de probabilidad de uso múltiple. Además, se incluye una serie de derivaciones de la probabilidad de no ocurrencia, cuya cantidad de derivadas identifica una mejor evolución de los cambios que se proponen. Se hace también investigación aplicada en el teorema de los cuatro colores con la inclusión de teoría de grafos y programación dinámica. La idea es acercar soluciones a los problemas de los migrantes, estudios de mercado, agricultura orgánica y especies. Con el modelo de probabilidad de no ocurrir y el modelo de derivaciones se muestran soluciones a los problemas de la educación y seguridad ciudadana.

Palabras Clave- Teoría de grafos, Teorema de los cuatro colores, probabilidades, programación dinámica.

Abstract- It is indispensable in the era of science and technology basic research in new models such as those that are included that are: Probability model for the theorem of the four colors and another model of probability of multiple use. In addition, a series of derivations of the probability of non -occurrence are included, whose number of derivatives identifies a better evolution of the changes that are proposed. Applied research is also done in the four -colored theorem with the inclusion of graphic theory and dynamic programming. The idea is to bring solutions to the problems of migrants, market studies, organic agriculture and species. With the probability model of not happening and the model of derivations shows solutions to the problems of citizen education and security.

Keywords- Graph theory, Four Color Theorem, probabilities, dynamic programming.

Mathematical Subject Classification: 05-06, 05C90.

I. INTRODUCCIÓN

Podemos asegurar, y esto a modo de ejemplo, que existen muchas derivaciones académicas de problemas sociales; pero que no se encontró todavía una aplicación sensible que satisfaga a todos en problemas como: la migración, especies, seguridad ciudadana, educación, y otros.

Por eso, y desde la ayuda de las matemáticas en la abstracción del teorema de los cuatro colores; se hace una serie de demostraciones de modelos de probabilidades derivado del teorema.

Además, como método alternativo a la gran problemática de la seguridad y educación se plantea tres

modelos, dos de ellos de probabilidad y el tercero determinista.

II. TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES.

En teoría de grafos, el teorema de los cuatro colores (o teorema de la minimalidad cromática) es un teorema sobre la coloración de grafos que establece lo siguiente: dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes o menos, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color[1].

Definición 1:

Grafo: Diagrama que representa mediante puntos y líneas las relaciones entre pares de elementos y que se usa para resolver problemas lógicos, topológicos y de cálculo combinatorio (Real Academia Española) .

En matemáticas y ciencias de la computación, un grafo es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto[2].

Son objeto de estudio de la teoría de grafos[3]; como se muestra en la figura 1.

$$G = (V, E)$$

Donde V: es el conjunto de vértices o nodos y E el conjunto de aristas o enlaces, representado como pares de vértices .

$$E \subseteq u, v \in V, u \neq v$$

Donde:

Vértices = A, B, C, D, ...

Colorea A color 1

Colorea B color 2

Colorea C color 3

Colorea D con el color 2 (es vecino de A y C, pero no de B)

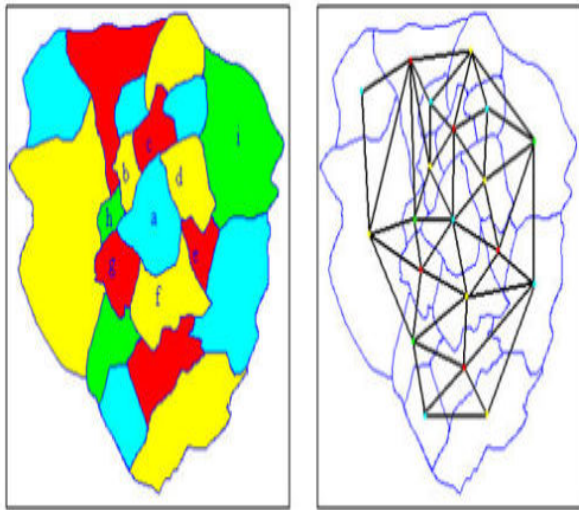


Fig. 1 teorema de los cuatro colores y grafos

Como podemos observar no hay un entrecruzamiento entre arcos de los distintos nodos por lo tanto este problema combinatorio se demostraría para cuatro colores; como se muestra en la figura 2.

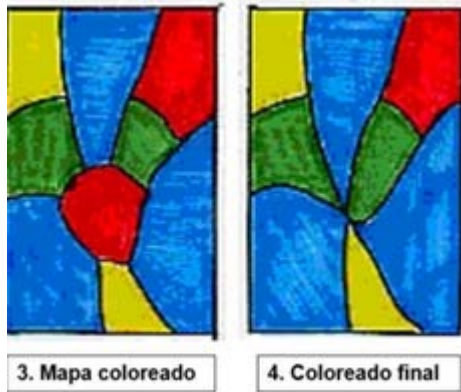


Fig. 2 Mapas coloreado de cuatro colores

Teorema 1:

Si computo un mismo color y su aparición vertical u horizontal y lo divido en la cantidad de colores vertical u horizontal tendré una probabilidad que será una coordenada de un punto de formación de polinomio de Lagrange para predicción de probabilidades[4].

$$P(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i}{\sum_{j=1}^{n_2} x_j} \quad (1)$$

Donde $i = 1..$ cantidad de un color vertical u horizontal
 $J = 1..$ cantidad de todos los colores vertical u horizontal
 $P(x)$ es una probabilidad de aparición horizontal.

$$P(y) = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} y_i}{\sum_{j=1}^{m_2} y_j}$$

$P(y)$ es una probabilidad de aparición vertical
Para el color rojo de la figura veamos las probabilidades

$$\begin{aligned} P(x_1) &= \frac{1}{3} \\ P(x_2) &= \frac{2}{4} \\ P(y_1) &= \frac{1}{3} \\ P(y_2) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ahora observemos los puntos que se forman, como se describe en la figura 3.

$$\begin{aligned} P1(x_1, y_1) &= (0.33, 0.33) \\ P2(x_2, y_2) &= (0.5, 0.25) \end{aligned}$$

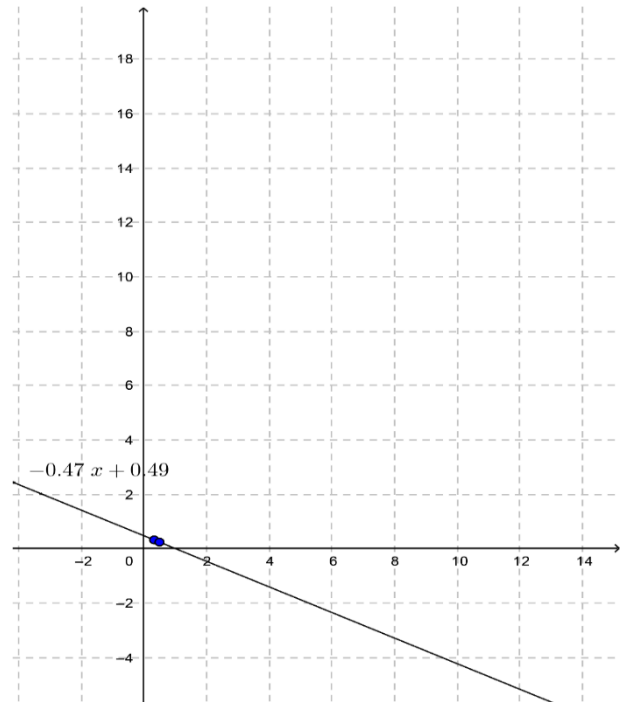


Fig. 3 Representación de Lagrange de colores.

III. CAMINO DEL MIGRANTE.

Uno de los principales problemas de Latinoamérica es la falta de oportunidades lo que provoca la migración a otros destinos. Veamos como desde las matemáticas podemos predecir la probabilidad de encontrar “posibilidades en la región”. Los países de Latinoamérica son ricos en capital humano y riquezas naturales.

$$\begin{aligned} F(x) &= m(x) + c \\ m &= -0.47 \\ c &= 0.49 \end{aligned}$$

Siendo estas variables que reflejan el polinomio de Lagrange.

$$F(x) = -0.47 \cdot x + 0.49$$

Si $x=0.25$ que es una probabilidad baja de encontrar “más de un empleador por la zona” entonces esperemos una probabilidad alta de $F(x)$. Además, el problema del migrante

sirve para los cuatro colores por ser improbable que dos empleadores de la misma naturaleza se encuentren juntos geográficamente Este análisis es hipotético.

$$F(x) = -0.47 \cdot 0.25 + 0.49 = 0.3725$$

Ahora, podemos concluir que una probabilidad de color baja es la consecuencia de que no haya muchos empleadores en la zona lo que generaría mayores ganancias a los mismos por no tener competencia; entonces la probabilidad de la recta es medianamente moderada.

Otro ejemplo:

$$X = 0.75 \\ F(x) = -0.47 \cdot 0.75 + 0.49 = 0.1375$$

Entonces que se repitan los colores en una zona genera muchas empresas del mismo rubro que provoca la pérdida de ganancias de alguna de ellas con el consecuente despido de empleados y migración a otras zonas donde los colores no se repitan tanto.

$$0 \leq F(x) \leq 0.49$$

Para el estudio de mercado es prudente y racional no poner dos negocios del mismo rubro juntos o cercanos, algo que es condición en el teorema de los cuatro colores.

Observemos una $x = 0.15$ que supondría pocos colores rojos en la línea y su consecuente probabilidad de color que es 0.15.

$$F(x) = -0.47 \cdot 0.15 + 0.49 = 0.4195$$

Esta probabilidad que se acerca al máximo valor de $F(x)$ que es 0.49 nos dice la importancia de que no se repitan negocios muy cercanos o pegados, algo que es condición del teorema de los cuatro colores

Entonces conviene, y dada la singularidad del problema, invertir en la zona .

IV. AGRICULTURA.

En la agricultura orgánica o ecológica los cultivos están separados y se puede cultivar en una hectárea varios cultivos Entonces podemos inferir que dado una separación lo bastante racional entre los cultivos, la probabilidad de cuatro colores se hará cada vez más grande y el cultivo se beneficiará. Sabemos que la agricultura orgánica genera tres veces mayor cantidad de trabajadores al prescindir de fertilizantes y maquinaria pesada.

$$F(x) = m(x) + c \\ X = 0.12 \\ F(x) = -0.47 \cdot 0.12 + 0.49 = 0.4336$$

Lo que quiere decir que $x = 0.12$ es una variedad de cultivo cada 8 cultivos que es $\frac{1}{8} = 0.125$ que es un aproximado La probabilidad alta infiere una siembra y cosecha productiva.

V. MIGRANTE.

Para ciertos casos es practicable el problema de la mochila como ser el migrante y saber cuáles serán los destinos, en lo posible dentro de su país con mayor demanda de empleo Para tercera columna podemos inferir dos veces color rojo, una vez verde y otra vez amarillo. Los valores para estos coeficientes económicos son:

$$\text{Rojo} = 35 \quad \text{verde} = 30 \quad \text{amarillo} = 25$$

Para los dos rojos se indaga los dos coeficientes tecnológicos:

$$\text{Rojo} = 50 \\ \text{Rojo} = 35 \\ \text{Verde} = 75 \\ \text{Amarillo} = 85$$

Corolario.

Entonces para el problema de los cuatro colores no puede haber dos empleadores o tomadores de demanda de empleo ya que su competencia haría que uno de los dos quiebre. Además, en el problema de la mochila si ocupa pocos recursos entonces esa oferta puede ser satisfecha como ocurre en las pymes que son negocios chicos y medianos pero que albergan el 70% de la mano de obra mundial. Sumo los dos rojos y obtengo.

$$35 \cdot \text{Rojo} + 25 \cdot \text{Amarillo} + 30 \cdot \text{verde} \rightarrow \text{MAX} \\ 85 \cdot \text{Rojo} + 75 \cdot \text{Verde} + 85 \cdot \text{Amarillo} \leq 180. \\ \text{Recursos} = 180.$$

Tomará los valores de menor coeficiente tecnológico y mayor coeficiente económico:

$$\text{Verde, Rojo, Amarillo} = 0.1$$

Rojo y Verde son las soluciones al problema de la mochila lo que quiere decir que esas pymes tienen que estar en el recorrido del migrante

Para el mismo gráfico de los cuatro colores tenemos dos rojos un amarillo y un verde. Sabemos que cuando menos nutrientes consuma de la tierra es mejor además del costo de siembra. Y cuando mayor sea la ganancia también será una variable que se elija:

$$\text{Rojo 1} = 35 \\ \text{Rojo 2} = 25 \\ \text{Verde} = 70 \\ \text{Amarillo} = 80 \\ 30 \cdot \text{Rojo} + 40 \cdot \text{Verde} + 55 \cdot \text{Amarillo} \rightarrow \text{MAX} . \\ 60 \cdot \text{Rojo} + 70 \cdot \text{Verde} + 80 \cdot \text{Amarillo} \leq 160 .$$

Las variables elegidas por problema de la mochila en programación lineal son:

$$\text{Verde y Amarillo}$$

Que nos lleva a analizar que los cuatro colores es una respuesta idónea a la agricultura orgánica por ser aplicable con el problema de la mochila .

VI. ESPECIES.

Es otra aplicación práctica donde consideramos a los colores como especies y sus coeficientes económicos en el problema de la mochila son capacidad para reproducirse, por lo tanto, altas capacidades para reproducirse generan que sea solución y no se extinga; así mismo los coeficientes tecnológicos serán su necesidad de nutrientes, lo que lleva al análisis de que si no necesitan grandes cantidades de nutrientes entonces pueden sobrevivir:

$$\begin{aligned} \text{Rojo } 1 &= 30 \\ \text{Rojo } 2 &= 40 \\ \text{Verde} &= 70 \\ \text{Amarillo} &= 45 \\ 80 \cdot \text{Rojo} + 50 \cdot \text{Verde} + 65 \cdot \text{Amarillo} &\rightarrow \text{MAX} \\ 70 \cdot \text{Rojo} + 70 \cdot \text{Verde} + 45 \cdot \text{Amarillo} &\leq 130 \end{aligned}$$

Los resultados del problema de la mochila para extinción de especies teniendo en cuenta su capacidad para reproducirse y su demanda de nutrientes o alimentos es: *Rojo, Amarillo* Esto se debe a que tienen altas capacidades de reproducción y consumen menos alimentos.

Recordemos que el color rojo se repite dos veces y el amarillo y verde una sola vez. El teorema de los cuatro colores es idóneo para este tipo de problemas ya que puede haber dos especies distintas compitiendo por alimentos y no puede haber la misma especie en el mismo territorio.

Teorema 2:

Si existe una probabilidad que se repite en n oportunidades o t tiempo, entonces la probabilidad de que eso no ocurra es $Pr = 1 - p^n$.

Demostración.

Dada una probabilidad o frecuencia relativa Laplaciana p , podemos abstraer su modelo original a través de saber que se repite n veces o t veces[5].

$$\begin{array}{c} \overbrace{p \wedge p \wedge p \wedge \dots \wedge p} \\ n \text{ veces} = p^n \end{array}$$

Esto es suponer que una misma probabilidad ocurre una vez y otra vez y después otra vez hasta n . El razonamiento de que esto no ocurra es el complemento de p^n .

Con lo que queda:

$$Pr = 1 - p^n \quad (2)$$

Extremos relativos:

$$\begin{aligned} N=0 \\ Pr &= 1 - p^0 \\ Pr &= 1 - 1 = 0 \quad [6] \end{aligned}$$

Demostremos a continuación la razón por la cual $p^0 = 1$. Tomemos a consideración p^n :

$$\begin{aligned} \text{Donde } n &= k - k = 0 \\ p^{(k-k)} &= \frac{p^k}{p^k} = 1 \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que $p^0 = 1$.

Si consideramos 0 casos la probabilidad de que esto no ocurra es 0, porque no hay casos a considerar[7].

$$N \rightarrow \infty$$

$Pr = 1 - p^\infty$ una probabilidad p exponente infinito se va haciendo cada vez más pequeña en los sucesivos productos hasta llegar a cero:

$$Pr = 1 - 0 = 1$$

Potencia de una probabilidad p elevado a ∞ es cero ya que esta va disminuyendo progresivamente hasta llegar a cero. Entonces si consideramos muchos casos donde se repite p , podemos esperar una alta probabilidad de que no ocurran:

$$\begin{aligned} P &= 0 \\ Pr &= 1 - 0^n \\ Pr &= 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Si la probabilidad de ocurrencia es nula o pequeña, la probabilidad de que no ocurra o su complemento se acerca a la unidad o certeza [6], como se muestra en la figura 4.

$$\begin{aligned} P &= 1 \\ Pr &= 1 - 1^n \\ Pr &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Sabemos que la unidad elevada a cualquier exponente distinta del infinito, en cuyo caso sería una indeterminación, da como resultado la unidad. Esto se traduce en que si la probabilidad de que ocurra es alta; entonces la probabilidad de que no ocurra es baja. Ahora veamos un segundo modelo:

$$Pt = 1 - p^t \quad (3)$$

Lo que cambia es que ahora la potencia es el tiempo lo que supone que se repite p en t veces en el tiempo. Extremos relativos de t :

$$\begin{aligned} T &= 0 \\ Pt &= 1 - p^0 \\ Pt &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

En el comienzo del fenómeno o $t=0$, la probabilidad es cero al no empezar todavía el fenómeno probabilístico.

$$\begin{aligned} T &= 1 \\ Pt &= 1 - p^1 \\ Pt &= 1 - p \end{aligned}$$

Cuando toma el valor máximo de t que es 1 queda de la forma primitiva de $1 - p$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq Pr \leq 1 \\ 0 &\leq p \leq 1: \\ 0 &\leq n < +\infty \\ 0 &\leq Pt \leq 1 \\ 0 &\leq t \leq 1 \\ Pr &= 1 - p^n \end{aligned}$$

Si consideramos una misma probabilidad p de que se cometa un asalto en una cuadra de una ciudad, podemos

considerar en la probabilidad de que no se cometan n asaltos en esa cuadra■.

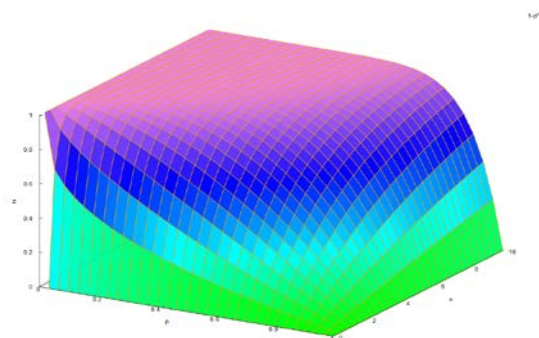


Fig. 4. Probabilidad de no ocurrencia

Ejemplo 1.

Veamos una simulación de la normal en Excel con números pseudo aleatorios y una media de robo de 0.7 con un desvío de 0.1.

$$\begin{aligned} P1 &= 0.66429995 \\ P2 &= 0.64751511 \\ P3 &= 0.74586241 \\ \text{Considero } n &= 3 \text{ robos} \\ Pr &= 1 - 0.66429995^3 \\ Pr &= 0.70684 \end{aligned}$$

Por lo tanto, no varía mucho la probabilidad de que no se cometan asaltos en 3 asaltos de la probabilidad de 1 asalto simulada p . Esto lo podemos deducir que es igualmente probable que se cometan 3 asaltos a que no se cometan ninguno. Para $p2$ y considero a $n=2$:

$$\begin{aligned} Pr &= 1 - 0.64751511^2 \\ Pr &= 0.58072 \end{aligned}$$

Consideramos en estas circunstancias una merma de la probabilidad en $n=2$ robos de que no se cometan Pr . En $p3$ y considero $n=2$.

$$\begin{aligned} Pr &= 1 - 0.74586241^2 \\ Pr &= 0.44368 \end{aligned}$$

Entonces, como dedujimos antes cuando crece p la probabilidad Pr disminuye como ocurre en $p3$ y $n=2$.

$$Pt = 1 - p^t \quad (3)$$

Consideremos una tasa temporal t de un 0.25% de robos en una calle y una probabilidad de robo $p=0.35$:

$$\begin{aligned} Pt &= 1 - 0.35^{0.25} \\ Pt &= 0.23083 \end{aligned}$$

Lo que concluimos es que es más probable el robo $p=0.35$ en un 25% del tiempo, que esto no ocurra $Pt=0.23083$.

Teorema 3:

Si $Pr = 1 - p^n$ es la probabilidad de la ocurrencia, entonces las continuas derivaciones de esta llevan al siguiente

modelo $Y = -((n-(k-1)) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n) \cdot p^{(n-k)}$, donde k es la cantidad de derivadas.

$$\begin{aligned} 0 &\leq p \leq 1 \\ 0 &\leq n < +\infty \\ 0 &\leq Y < +\infty \end{aligned}$$

Demostración.

Primera derivada:

$$Y = -n \cdot p^{(n-1)}$$

Segunda derivada:

$$Y = -(n-1) \cdot n \cdot p^{(n-2)}$$

Tercera derivada:

$$Y = -(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot p^{(n-3)}$$

Así sucesivamente hasta k derivadas:

$$Y = -((n-(k-1)) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n) \cdot p^{(n-k)}$$

Extremos relativos:

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ Y &= -((0-(k-1)) \cdot \dots \cdot (0-2) \cdot (0-1) \cdot 0) \cdot p^{(0-k)} \\ Y &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que queda de análisis al inicio de derivación o sin derivación alguna $Y = 0$, lo que es razonable.

$$\begin{aligned} N &\rightarrow \infty \\ Y &= -((n-(k-1)) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n) \cdot p^{(n-k)} \\ Y &= \infty \cdot \infty \cdot p^\infty = \infty \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra que los extremos de n generan como resultado 0 [8].

$$\begin{aligned} P &= 0 \\ Y &= -((n-(k-1)) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n) \cdot 0^{(n-k)} \\ Y &= 0. \end{aligned}$$

Menor probabilidad de p es una deducción de menor valor de Y .

$$\begin{aligned} P &= 1 \\ Y &= -((n-(k-1)) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n) \cdot 1^{(n-k)} \\ Y &= -((n-(k-1)) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n). \end{aligned}$$

Esto demuestra que el mayor valor de p genera el mayor valor de Y ■.

VII. EJEMPLOS PRÁCTICOS.

A) Seguridad

Si consideramos al delito una variable con infinitas derivaciones de probabilidades, entonces podemos considerar el modelo para saber que combatiendo hasta el último de los delitos la función toma los menores valores de cambio

Veamos para dos cambios de derivación, y una probabilidad de ocurrencia p baja:

$$Y = -(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot p^{(n-3)}$$

$$Y = -(4-2) \cdot (4-1) \cdot 4 \cdot 0.35^{(4-3)}$$

$$Y = -8.4$$

Lo que observamos es que, si hacemos una cantidad grande de derivaciones y además consideramos una n grande, entonces los valores que se arrojan para $k=3$ y $n=4$ son medianamente altos lo que lleva a pensar que los cambios que se llevan a cabo en seguridad para una probabilidad de ocurrencia baja y $k \rightarrow n$ son 8 veces más altos de los valores de probabilidad reales. Otro ejemplo:

$$Y = -(3-1) \cdot 3 \cdot 0.85^{(3-2)}$$

$$Y = -5.1$$

Las derivaciones son menores, aunque $k \rightarrow n$ podemos considerar que una probabilidad de p alta nos lleva a cambios bajos de valor de función.

La función Y se entiende como los cambios de la probabilidad de p en k oportunidades.

La conclusión que se lleva a cabo para estas derivaciones de la probabilidad Pr , es que cuando $k \rightarrow n$ podemos esperar altos valores de derivaciones; razón que nos hace suponer que en seguridad cuando se lucha con la mayor cantidad de delinquentes y se los captura las derivaciones serán altas; además, para este mismo análisis vale la pena destacar que una k alta también lleva a valores altos de Y .

B) Educación: Maltrato entre compañeros de aula

La violencia en las escuelas es un tema recurrente que viene de violencia en los hogares de los niños o jóvenes que trasladan a las aulas. Un ambiente violento en el hogar tiene como corolario la violencia en las aulas.

En un colegio de San Miguel de Tucumán – Tucumán, Argentina se consideraron 12 alumnos violentos sobre un total de 32. Dividamos en 10 a estos valores para evitar números demasiados grandes.

$$P = (1.2/3.2) = 0.375$$

$$Y = -(3.2-1) \cdot 3.2 \cdot 0.375^{(3.2-1)}$$

$$Y = -0.81365$$

El valor de los cambios es bajo al tener una probabilidad de ocurrencia p baja y al considerar una $k=1$ que es pequeña ya que se analiza ayudar a 1 niño del total.

Analicemos una $k=3$:

$$Y = -(3.2-2) \cdot (3.2-1) \cdot 3.2 \cdot 0.375^{(3.2-3)}$$

$$Y = -6.94320$$

Para tomar como conclusiones que si $k \rightarrow n$ las derivaciones toman su valor más alto. También es importante destacar que $k \rightarrow n$ se considera como que se quiere mejorar el ambiente en las aulas lo mayor posible ayudando a todos los niños o jóvenes que sufren episodios de violencia por parte de los compañeros.

VIII. CONCLUSIONES.

Es de gran importancia la inclusión del método científico y más específicamente las matemáticas en las ciencias sociales; por lo que en el artículo se incluyeron una serie de soluciones a problemas puntuales de gran impacto social con la ayuda del teorema de los cuatro colores, teorema de probabilidades y su teorema de derivaciones. Estos teoremas fueron demostrados en teoría y práctica rigurosamente, lo que nos lleva a funciones de adaptabilidad a problemas sensibles de difícil análisis, pero de amplia y generosa aplicabilidad.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia y amigos, Marcos Fajardo Rendón, AUS Damián García Pascualini, AUS Adrián Murua, Ing. Gustavo Carrasco, Cdr Arturo López, Cdr Adolfo Rodríguez, Prof. María Leonor Gómez Llanos, Ing. Fanny Herrera, Dr ing. Jorge Perera, Luis Sacaba, Ing. Ricardo Adra, Prof. Carlos Córdoba, Prof. Diego Di Pietro, amigos de acción católica, sacerdote Miguel Galland.

REFERENCIAS

- [1] F. Harary, *Teoría de grafos*, Addison Wesley, USA, 1972.
- [2] N. Hartsfield, and G. Ringel, *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*, Dover, N.Y., 2003.
- [3] R. J. Trudeau, *Introduction to Graph Theory*, 2nd Edition, Dover Publications, New York, 1993.
- [4] W. H. Tutte, *Kempe Chains and the Four Colour Problem*. In: Eells, J., Toledo, D. (eds) Hassler Whitney Collected Papers. Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2972-8_13, 1992.
- [5] D. E. Smith, *Rara Arithmetica*, Ginn, New York, 1908.
- [6] R. Kaplan, *Una historia natural del cero. La nada que existe*, Océano, México, 2004.
- [7] K. Leeb-Lundberg, *Zero. Mathematics Teaching* 78, p.p. 24-25, 2004.
- [8] T. Y. Chow, *What is a Closed-Form Number?*, The American Mathematical Monthly vol. 106, p.p. 440-448, 1999.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*